Seat No. : ______________

AJ-119

April-2016

B.Sc., Sem.-IV

CC-204 : Mathematics

(Advanced Calculus – II)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) **તમામ** પ્રશ્નો ફરજીયાત છે.
(2) જમણી તરફનાં અંક જે તે પ્રશ્ન/પેટા પ્રશ્નનો ગુણભાર દર્શાવે છે.
(3) આ પ્રશ્નપત્રમાં દર્શાવેલા સંકેતો તેનો સામાન્ય અને પ્રચલિત અર્થ ધરાવે છે.

1. (a) સમતલો $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ વડે સીમિત પ્રદેશ V પર સંકલન $\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{(x + y + z + 1)^3}$ નું મૂલ્ય શોધો. **7**

અથવા

ત્રિપલ સંકલનની સમજ આપો. તેનો ઉપયોગ કરી $\int_0^1\int_0^\pi\int_0^\pi y \sin z\, dx\, dy\, dz$નું મૂલ્ય શોધો.

(b) સંકલન $\int_0^{4a}\int_{\frac{x^2}{4a}}^{2\sqrt{ax}} f\, dy\, dx$ના ચલોનો ક્રમ બદલો. **7**

અથવા

$u = \frac{2x - y}{2}$, $v = \frac{y}{2}$ પરિવર્તન લઈને સંકલન $\int_0^4 \int_{x=\frac{y}{2}}^{x=\frac{y}{2}+1} \frac{2x - y}{2}\, dx\, dy$નું મૂલ્ય શોધો.

2. (a) સાબિત કરો કે $\left\lceil \frac{1}{2} \right. = \sqrt{\pi}$ અને તેના પરથી $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$નું મૂલ્ય શોધો. **7**

અથવા

સાબિત કરો : $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$.

(b) બીટા-ગામા વિધેયોનો ઉપયોગ કરીને નીચેના સંકલિતો મેળવો : **7**

(i) $\int_0^\infty \frac{x^4}{(1 + x^2)^4}\, dx$ (ii) $\int_0^\infty x^2 e^{-x^4}\, dx$

અથવા

સાબિત કરો : $\text{div}(\text{curl } \bar{f}) = 0$ અને $\text{curl}(\text{grad } \phi) = \bar{0}$.

3. (a) ગ્રીનનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

અથવા

ગોસનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(b) જો C એ $r = (t, t^2, t^3); 0 \le t \le 1$ વડે વ્યાખ્યાયિત વક્ર હોય, તો $\int_C (y^2 - z^2)\, dx + 2yz\, dy - x^2\, dz$ નું મૂલ્ય શોધો. **7**

અથવા

જો S એ ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ની પહેલા અષ્ટાંશમાંની સપાટી હોય, તો $\iint_S f \cdot n\, dS$નું મૂલ્ય શોધો, જ્યાં $f = (yz, zx, xy)$

4. (a) લાગ્રાન્જનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

અથવા

$z = xy + f(x + y)$નું આંશિક વિકલ સમીકરણ શોધો.

(b) શરતો $z(x, 0) = x^2; z(1, y) = \sin y$ ને આધીન $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = x^2 y$ ઉકેલો. **7**

અથવા

આંશિક વિકલ સમીકરણ $x^2 p + y^2 q = (x^2 - y^2)z$ ઉકેલો.

5. નીચે આપેલ પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો : (કોઈપણ **સાત**) **14**

(1) $\int_0^1 \int_0^x 1\, dy\, dx$ નું મૂલ્ય શોધો.

(2) જો $\bar{r} = (x, y, z), r = |\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ હોય, તો દર્શાવો કે $\text{curl}\, \bar{r} = \bar{0}$.

(3) સાબિત કરો : $B(m, n) = B(n, m)$.

(4) વ્યાખ્યા આપો : ડાયવર્જન્સ (divergence) અને કર્લ (curl).

(5) વક્ર $y = x^2$ પર $\int (x\, dy - y\, dx)$ નું મૂલ્ય શોધો.

(6) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^6 x\, dx$ નું મૂલ્ય શોધો.

(7) ગામા વિધેયનું ડુપ્લીકેશન (duplication) સૂત્ર લખો.

(8) શોધો : $\left\lceil \frac{3}{2} \right.$

(9) જો $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, તો $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ શોધો.

Seat No. : _______________

AJ-119

April-2016

B.Sc., Sem.-IV

CC-204 : Mathematics

(Advanced Calculus – II)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) **All** questions are compulsory.
(2) Figures to the right indicate full marks of the question/sub-question.
(3) Notations used in this question paper carry their usual meaning.

1. (a) Evaluate $\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$ over the region V bounded by planes $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ **7**

OR

Define Triple integration and use it to evaluate $\int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} y \sin z \, dx\, dy\, dz$.

(b) Change the order of integration $\int_0^{4a}\int_{\frac{x^2}{4a}}^{2\sqrt{ax}} f\, dy\, dx$. **7**

OR

Evaluate $\int_0^4 \int_{x=\frac{y}{2}}^{x=\frac{y}{2}+1} \frac{2x-y}{2}\, dx\, dy$, by applying the transformation $u = \frac{2x-y}{2}$, $v = \frac{y}{2}$

2. (a) Prove that $\left\lceil \frac{1}{2} \right. = \sqrt{\pi}$ and hence evaluate $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$. **7**

OR

Prove that $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$.

(b) Evaluate the following integrals using Beta-Gamma functions **7**

(i) $\int_0^{\infty} \frac{x^4}{(1+x^2)^4}\, dx$

(ii) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^4}\, dx$

OR

Prove that $\text{div}(\text{curl}\, \overline{f}) = 0$ and $\text{curl}\,(\text{grad}\, \phi) = \overline{0}$.

3. (a) State and prove Green's theorem. **7**

OR

State and prove Gauss's theorem.

(b) Evaluate $\int_C (y^2 - z^2)\, dx + 2yz\, dy - x^2\, dz$ where C is the curve defined by $r = (t, t^2, t^3),\ 0 \le t \le 1$. **7**

OR

Evaluate $\iint_S f \cdot n\, dS$, where $f = (yz, zx, xy)$ and S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, which lies in the first octant.

4. (a) State and Prove Lagrange's theorem. **7**

OR

Find Partial Differential equation of $z = xy + f(x + y)$.

(b) Solve $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = x^2 y$ subject to condition $z(x, 0) = x^2$ and $z(1, y) = \sin y$. **7**

OR

Solve the partial differential equation $x^2 p + y^2 q = (x^2 - y^2)z$.

5. Answer the following questions in short : (any **seven**) **14**

(1) Evaluate $\int_0^1 \int_0^x 1\, dy\, dx$.

(2) If $\overline{r} = (x, y, z)$, $r = |\overline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ then show that curl $\overline{r} = \overline{0}$.

(3) Prove that $B(m, n) = B(n, m)$.

(4) Define divergence and curl.

(5) Evaluate $\int (x\, dy - y\, dx)$ over the curve $y = x^2$.

(6) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^6 x\, dx$.

(7) State duplication formula of Gamma function.

(8) Evaluate $\left\lceil \frac{3}{2} \right.$

(9) If $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, find $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$.