Seat No. : _______________

AK-113

April-2016

B.Sc., Sem.-IV

CC-205 : Mathematics
(Abstract Algebra – I)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) તમામ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે તથા પ્રત્યેકનો ગુણભાર **14** છે.

(2) સર્વત્ર સંકેતો પ્રચલિત છે.

(3) જમણી તરફના અંક જે-તે પ્રશ્ન/પેટા પ્રશ્નનો ગુણભાર દર્શાવે છે.

1. (a) સામ્ય સંબંધની વ્યાખ્યા આપો તથા દર્શાવો કે ગણ $\mathbb{Z}$ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ S, $a, b \in \mathbb{Z}$ માટે $b - a$ યુગ્મપૂર્ણાંક હોય ત્યારે aSb થાય તો S ગણ $\mathbb{Z}$ પરનો સામ્ય સંબંધ છે. **7**

અથવા

સમૂહની વ્યાખ્યા આપો તથા સાબિત કરો કે પ્રત્યેક સમૂહ $(G, *)$ ને અનન્ય વ્યસ્ત ઘટક હોય છે.

(b) સાબિત કરો કે G સમક્રમી સમૂહ હોય તો અને તો જ $\forall a, b \in G$ માટે $(ab)^2 = a^2b^2$ થાય. **7**

અથવા

સાબિત કરો : Q_0 પરની દ્વિક્ ક્રિયા $*$ $a * b = \frac{ab}{2}$, $a, b \in Q_0$ પર વ્યાખ્યાયિત હોય તો $(Q_0, *)$ એ સમૂહ છે.

2. (a) સાબિત કરો : H એ શાંત સમૂહ Gનો ઉપસમૂહ હોય, તો $O(H) \mid O(G)$ થાય. **7**

અથવા

સાબિત કરો : જ્યારે H એ Gનો ઉપસમૂહ હોય ત્યારે $x \in G$ માટે $x^{-1}Hx = \{x^{-1}hx / h \in H\}$ પણ G નો ઉપસમૂહ હોય છે.

(b) સાબિત કરો : ચક્રિય સમૂહનો કોઈપણ ઉપસમૂહ ચક્રિય હોય છે. **7**

અથવા

ચક્રિય સમૂહ $G = \langle a \rangle$ ની કક્ષા 12 હોય, તો તેના ઉપસમૂહો મેળવો અને લેટિસ આકૃતિ દોરો.

3. (a) ફેરબદલીની વ્યાખ્યા આપો તથા $S = \{1, 2, 3\}$ પરના તમામ ક્રમચયોની યાદી બનાવો તથા સમૂહ S_3નું કોષ્ટક તૈયાર કરો. **7**

અથવા

નિયત ઉપ-સમૂહની વ્યાખ્યા આપો તથા સાબિત કરો કે જો H એ સમૂહ G નો નિયત ઉપસમૂહ હોય તો અને તો જ $\forall\, a \in G$, માટે $a H a^{-1} \subset H$ થાય.

(b) $f = (1, 4, 3, 2, 5)$ તથા $g = (1, 2)\,(4, 3, 5) \in S_5$ માટે f^2, fg તથા g^2 ના ઘટકોની કિંમત મેળવો. **7**

અથવા

સમૂહ S_3 ના બધાજ ઉપસમૂહો મેળવો અને તેની લેટિસ આકૃતિ દોરો.

4. (a) સાબિત કરો : બે સમૂહો વચ્ચેનો સંબંધ 'એકરૂપ હોવું' સામ્ય સંબંધ છે. **7**

અથવા

'કેઈલે' નું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(b) સાબિત કરો : જો H એક સમૂહ Gનો ઉપસમૂહ હોય તથા $\phi : (G, O) \rightarrow (G', *)$ એ સમરૂપતા હોય તો $\phi(H)$ એ G'નું ઉપસમૂહ છે. **7**

અથવા

સમરૂપતા અંગેનુ પ્રથમ મૂળભૂત પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

5. ટૂંકમાં જવાબ આપો : (**સાત**) **14**

(1) સ્વવાચક સંબંધ અને પરંપરિત સંબંધની વ્યાખ્યા આપો.

(2) અસમક્રમી દ્વિક ક્રિયાની વ્યાખ્યા અને એક ઉદાહરણ આપો.

(3) $(J_4, +)$ સમૂહના ઉપસમૂહો લખો.

(4) વામ-સહગણ અને દક્ષિણ-સહગણની વ્યાખ્યા લખો.

(5) યુગ્મ-ક્રમચય અને અયુગ્મ ક્રમચયની વ્યાખ્યાઓ લખો.

(6) સમૂહ S_3 નો ચક્રિય ઉપસમૂહ અને તેની કક્ષા લખો.

(7) સમરૂપતાના ગર્ભની વ્યાખ્યા આપો અને એક ઉદાહરણ આપો.

(8) ચક્રિય સમૂહની વ્યાખ્યા અને એક ઉદાહરણ આપો.

(9) બે સમૂહો વચ્ચેની એકરૂપતાની વ્યાખ્યા આપો.

Seat No. : _______________

AK-113

April-2016

B.Sc., Sem.-IV

CC-205 : Mathematics
(Abstract Algebra – I)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) **All** the questions are compulsory and carry **14** marks.
(2) Notations are usual, everywhere.
(3) Figures to the right indicate marks of the question/sub-question.

1. (a) Define an equivalence relation and show that the relation S defined on the set $\mathbb{Z}$; for a, b $\in \mathbb{Z}$, aSb if b – a is an even integer, then S is an equivalence relation on the set $\mathbb{Z}$. **7**

OR

Define a group and prove that every group (G, $*$) has a unique group inverse.

(b) Prove that a group G is commutative if and only if $(ab)^2 = a^2b^2$ for $\forall$ a, b$\in$G. **7**

OR

Prove : Binary operation $*$ defined on the set Q_0 as $a * b = \frac{ab}{2}$ if a, b $\in Q_0$, then $(Q_0, *)$ is a group.

2. (a) Prove : If H is a subgroup of a finite group G, then O(H) | O(G). **7**

OR

Prove : If H is a subgroup of G, then the set $x^{-1}Hx = \{x^{-1}hx / h \in H\}$ is also a subgroup of G for $x \in$ G.

(b) Prove : A subgroup of cyclic group is cyclic. **7**

OR

Obtain the subgroups of a cyclic group G = <a> of order 12 and draw lattice diagram.

3. (a) Define a transposition. List all permutations on $S = \{1, 2, 3\}$ and prepare table of groups S_3. **7**

OR

Define a normal subgroup & prove that H is a normal subgroup of a group G if and only if $aHa^{-1} \subset H$ for each $a \in G$.

(b) Define the values of component of f^2, fg & g^2 for $f = (1, 4, 3, 2, 5)$ and $g = (1, 2)(4, 3, 5) \in S_5$. **7**

OR

Obtain the all subgroups of group S_3 and draw their lattice diagram.

4. (a) Prove : 'Isomorphism' between two groups is an equivalence relation. **7**

OR

State and prove Cayley's theorem.

(b) Prove : If H is a subgroup of a group G & $\phi : (G, O) \rightarrow (G', *)$ is a group homomorphism, the $\phi(H)$ is a subgroup of G'. **7**

OR

State and prove the first fundamental theorem of homomorphism.

5. Answer in short : (**Seven**) **14**

(1) Define reflexive relation and transitive relation.

(2) Define non-commutative relation and also give an example.

(3) State the subgroups of group $(J_4, +)$.

(4) Define left-coset and right-coset.

(5) Define even permutation and odd permutation.

(6) State the cyclic subgroups of the group S_3 and also state their orders.

(7) Define a 'Kernel of homomorphism' and also give an example.

(8) Define a cyclic group and also give an example.

(9) Define an isomorphism between two groups.