Seat No. : _______________

NJ-110

December-2015

B.Sc., Sem.-III

Core Course-202 : Mathematics

(Linear Algebra – I)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) **બધા** જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.
(2) કુલ **પાંચ** પ્રશ્નો છે.
(3) જમણી બાજુના અંક દરેક પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

1. (a) જો A અને B એ V ના ઉપાવકાશો હોય, તો સાબિત કરો કે $A \cap B$ પણ Vનો ઉપાવકાશ છે. શું $A \cup B$ એ V નો ઉપાવકાશ છે ? તમારા જવાબનું સમર્થન આપો. **7**

અથવા

સદિશ અવકાશના ઉપાવકાશની વિસ્તૃતિ વ્યાખ્યા આપો. જો S એ સદિશ અવકાશ V નો અશૂન્ય ઉપાવકાશ હોય, તો [S] એ S ને સમાવતું નાનામાં નાનું ઉપાવકાશ છે. એમ બતાવો.

(b) પ્રચલિત સંકેતમાં R^2 માં બે સદિશના સરવાળા અને અદિશનાં સદિશ ગુણાકારની વ્યાખ્યા હેઠળ R^2એ વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ છે એમ બતાવો. **7**

અથવા

અશૂન્ય ઉપગણ $B = \{(x, y, z) / 2x + y - 5z = 0\}$ એ R^3નો ઉપાવકાશ છે એમ બતાવો.

2. (a) જો w_1 અને w_2 એ V નું ઉપાવકાશ હોય તો સાબિત કરો કે
$\dim (w_1 + w_2) = \dim w_1 + \dim w_2 - \dim (w_1 \cap w_2)$ **7**

અથવા

સદિશ અવકાશ Vનાં સુરેખ સ્વાયત્ત અને સુરેખ અવલંબનની વ્યાખ્યા આપો.
સાબિત કરો કે :
(i) સુરેખ સ્વાયત્ત ઉપગણનો પ્રત્યેક અરિક્ત ઉપગણ સુરેખ સ્વાયત્ત છે.
(ii) સુરેખ અવલંબી ઉપગણનો પ્રત્યેક અધિગણ સુરેખ અવલંબી છે.

(b) સાબિત કરો કે $W = \{(1, 1, 1)\ (1, -1, 1)\ (0, 1, 1)\}$ એ R^3 નો આધાર છે. સદિશ $(1, -1, 1)$ ના આધાર W સાપેક્ષ યામ મેળવો. **7**

અથવા

જો $A = \{(a, 0) / a \in R\}$ અને $B = \{(0, b) / b \in R\}$ R^2 ના ઉપાવકાશો હોય, તો $\dim A$, $\dim B$, $\dim (A + B)$, $\dim(A \cap B)$ મેળવો.

3. (a) સુરેખ પરિવર્તન $T : V \to W$ માટે શૂન્યાવકાશ અને વિસ્તારગણની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે **7**
(1) N(T) એ V નું ઉપાવકાશ છે.
(2) R(T) એ W નું ઉપાવકાશ છે.

અથવા

સુરેખ પરિવર્તનનાં અસ્તિત્વ માટેનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(b) સુરેખ પરિવર્તન $T : R^3 \to R^3$ નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે : **7**

$\forall (x, y, z) \in R^3$ માટે

$T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$ માટે શૂન્યાંક કોટયાંક પ્રમેય ચકાસો.

અથવા

નીચે આપેલ વિધેયો સુરેખ છે કે નહીં તે ચકાસો :

$T : R^2 \to R^3$

$S : R^2 \to R^3$

(1) $T(x_1, x_2) = (x_1, (x_1 + x_2)^2, x_2)$

(2) $S(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, x_2)$

$\forall (x_1, x_2,) \in R^2$

4. (a) સુરેખ પરિવર્તન સાથે સંકળાયેલ શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો. **7**

અથવા

શ્રેણિક માટે કોટયાંક તથા શૂન્યાંકની વ્યાખ્યાયિત કરો અને

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ માટે કોટયાંક મેળવો.

(b) વાસ્તવિક સદિશ અવકાશો R^4 અને R^3ના પ્રમાણિત આધાર લઈને શ્રેણિક **7**

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ સાથે સંકળાયેલ સુરેખ પરિવર્તન મેળવો.

અથવા

$T(x, y) = (x, -y)$ વડે વ્યાખ્યાયિત સુરેખ પરિવર્તન $T : R^2 \longrightarrow R^2$ નો R^2ના ક્રમયુક્ત આધાર

$B_1 = \{(1, 1) (1, 0)\}$ અને $B_2 = \{(2, 3) (4, 5)\}$ ને સાપેક્ષ શ્રેણિક શોધો.

5. નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ લખો : (ગમે તે **સાત**) **14**

(1) ગણ $A = \{(0, 0, 0) (1, 2, 3) (1, 1, 1)\}$ સુરેખ સ્વાયત્ત કે અવલંબન તે નક્કી કરો.

(2) સદિશ $(2, 5)$ એ span $\{(0, 1) (1, 1)\}$માં આવેલો છે કે નહિ તે ચકાસો.

(3) સદિશ અવકાશની વ્યાખ્યા આપો.

(4) સુરેખ પરિવર્તનની વ્યાખ્યા આપો. સુરેખ પરિવર્તન સુરેખકારક ક્યારે કહેવાય ?

(5) સુરેખ પરિવર્તન $T : V \to W$ માટે સાબિત કરો કે $T(\theta) = \theta$ જ્યાં θ એ શૂન્ય સદિશ છે.

(6) શ્રેણિકનાં શૂન્યાવકાશ અને વિસ્તારગણની વ્યાખ્યા આપો.

(7) "શૂન્યાંક કોટયાંક"નું કથન લખો.

(8) ગણ $A = \{(1, 0)\}$ ને R^2ના આધાર સુધી વિસ્તૃત કરો.

(9) જો $T : R^2 \to R^2$ એ $T(a, b) = (a, - b)$ હોય, તો T^{-1} મેળવો.

Seat No. : _______________

NJ-110

December-2015

B.Sc., Sem.-III

Core Course-202 : Mathematics

(Linear Algebra – I)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) **All** questions are compulsory.

(2) There are **five** questions.

(3) Right hand side figure indicate marks of each sub-questions/question.

1. (a) If A and B are two subspaces of a vecterspace V, then prove that $A \cap B$ is a subspace of V. Is $A \cup B$ is a subspace of V ? Justify your answer. **7**

OR

Define span of subset of vectorspace. If S is a non-empty subset of a vectorspace V, then prove that [S] is the smallest subspace of V containing S.

(b) Prove that R^2 is a real vectorspace under usual definition of addition of two vector and scalar multiplication in R^2. **7**

OR

Prove that a non-empty subset $B = \{(x, y, z) / 2x + y - 5z = 0\}$ is a subspace of R^3.

2. (a) If w_1 and w_2 are subspaces of a vectorspace V, then prove that

$\dim (w_1 + w_2) = \dim w_1 + \dim w_2 - \dim (w_1 \cap w_2)$ **7**

OR

Define linear independent and linear dependent subsets of vectorspace V.

Prove that :

(i) Any non-empty linear independent subset is a linear independent.

(ii) Any super subset of linear dependent of a vectorspace V is a linear dependent.

(b) Prove that the subset $W = \{(1, 1, 1)\ (1, -1, 1)\ (0, 1, 1)\}$ of R^3 is a basis of R^3. Find the co-ordinate of vector (1, –1, 1) with respect to given basis W. **7**

OR

If $A = \{(a, 0) / a \in R\}$ and $B = \{(0, b) / b \in R\}$ are subspaces of R^2 then find dim A, dim B, dim (A + B), dim $(A \cap B)$.

3. (a) Define Nullspace and Range space of linear transformation $T : V \to W$. **7**

Prove that :

(1) N(T) is a subspace of V

(2) R(T) is a subspace of W

OR

State and prove the existence theorem of a linear transformation.

(b) Verify Rank-Nullity theorem for linear map
$T : R^3 \to R^3$ defined by
$T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)\ \forall\ (x, y, z) \in R^3$ **7**

OR

Define functions $T : R^2 \to R^3$, $S : R^2 \to R^3$ as follows :

(1) $T(x_1, x_2) = (x_1, (x_1 + x_2)^2, x_2)$

(2) $S(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, x_2);\ \forall\ (x_1, x_2) \in R^2$

Check whether two functions linear or not ?

4. (a) Explain matrix associated with linear map. **7**

OR

Define rank and nullity of matrix. Find rank of the given matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

(b) Using standard basis of vectorspaces R^4 and R^3. Find the linear transformation of a given matrix. **7**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

OR

Let a linear transformation $T : R^2 \longrightarrow R^2$ is defined by $T(x, y) = (x, -y)$, find the matrix associated with linear transformation T relative to a ordered bases.
$B_1 = \{(1, 1)\ (1, 0)\}$ and $B_2 = \{(2, 3)\ (4, 5)\}$ of R^2.

5. Answer any **seven** in short : **14**

(1) Check set $A = \{(0, 0, 0)\ (1, 2, 3)\ (1, 1, 1)\}$ is linear independent or linear dependent.

(2) Check vector (2, 5) lies in a span {(0, 1) (1, 1)}.

(3) Define Vector space.

(4) Define linear transformation when a linear transformation is a linear operator.

(5) If θ is a zero vector, then for linear transformation $T : V \to W$ prove that $T(\theta) = \theta$

(6) Define Nullspace and Range space of any matrix.

(7) State "Rank Nullity Theorem".

(8) Extend set $A = \{(1, 0)\}$ upto a basis of R^2.

(9) If $T : R^2 \to R^2$ defined by $T(a, b) = (a, -b)$, then find T^{-1}.