Seat No. : _______________

NI-108

December-2015

B.Sc., Sem.-III

Core Course-201 : Mathematics

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) તમામ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે અને દરેકના ગુણ 14 છે.

(2) સર્વત્ર સંકેતો પ્રચલિત છે.

(3) જમણી તરફના અંક જે તે પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્નોના ગુણભાર દર્શાવે છે.

1. (a) દ્વિચલ વિધેયના લક્ષની વ્યાખ્યા આપો. આ વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરીને

$\lim\limits_{(x,y) \to (1, 1)} \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$ મેળવો. **7**

અથવા

પુનરાવર્તિત લક્ષની વ્યાખ્યા આપો તથા વિધેય

$f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$, જો $x + y \neq 0$

$= 3$, જો $x + y = 0$

નું (0, 0) પાસે પુનરાવર્તિત લક્ષ મેળવો.

(b) જો $\varphi(x)$ એ $(a, \varphi(a)) = (a, b)$ બિંદુએ સતત હોય અને

$\lim\limits_{(x,y) \to (a, b)} f(x, y) = L \in R$ હોય તો સાબિત કરો કે

$\lim\limits_{x \to a} f(x, \varphi(x))$ અસ્તિત્વ ધરાવે છે અને તે Lની બરાબર થાય છે. **7**

અથવા

દ્વિચલ સતત વિધેયની વ્યાખ્યા આપો.

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \text{ જો } x^2 + y^2 \neq 0$$

$$= 0 \quad \text{જો } x^2 + y^2 = 0$$

માટે f(x, y)નું (0, 0) બિંદુએ સાતત્ય ચર્ચો.

2. (a) દિક્ વિકલનની વ્યાખ્યા આપો તથા $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$, $x \neq 0, y \neq 0$ **7**

$$= 0 , x = 0, y = 0$$

માટે (0, 0) બિંદુ પાસે $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ની દિશામાં દિક્ વિચલન શોધો.

અથવા

યંગનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(b) જો $u = \log (x^2 + y^2 + z^2)$ તો સાબિત કરો કે $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2}$. **7**

અથવા

જો વિધેય $f(x, y) = \sin^{-1} \frac{x}{y}$; $y \neq 0$

$$= 0 \quad ; \; y = 0$$

માટે f_{xx}, f_{yy} અને f_{xy} શોધો.

3. (a) સમપરીમાણીય વિધેય માટેનું ઓઈલરનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

અથવા

જો $u = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x + y}$, $x + y \neq 0$ તો સાબિત કરો કે

(1) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$ અને

(2) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin 4u - \sin 2u$.

(b) ત્રણ ધન સંખ્યા શોધો કે જેનો સરવાળો 24 હોય અને ગુણાકાર મહત્તમ હોય. **7**

અથવા

વિધેય f એ R^2 ના વિવૃત પ્રદેશ E પર વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય હોય $(a, b) \in E$ બિંદુએ વિકલનિય કે જેને (a, b) બિંદુએ સ્થાનીય સ્થિર મૂલ્ય હોય તો સાબિત કરો કે $f_x(a, b) = 0$ અને $f_y(a, b) = 0$ થાય.

4. (a) વક્ર $y = f(x)$ની વક્રતા ત્રિજ્યા શોધો. એટલે કે $\rho = \dfrac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$. **7**

અથવા

વક્ર $r = f(\theta)$ ની વક્રતા ત્રિજ્યા ધ્રુવીય સ્વરૂપે શોધો.

(b) પરવલય $y^2 = 4ax$ની વક્રતા ત્રિજ્યા શોધો. **7**

અથવા

વિધેય $f(x, y) = e^{ax} \cos by$ ના x અને yની ઘાતમાં વિસ્તરણના પ્રથમ ત્રણ પદો શોધો.

5. ટૂંકમાં જવાબ આપો : (કોઈપણ **સાત**) **14**

(a) સમપરિમાણીય વિધેયની વ્યાખ્યા આપો.

(b) શ્વાર્ત્ઝનો પ્રમેય લખો.

(c) જો $u = \log(x^2 + y^2)$ તો સાબિત કરો કે $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

(d) વક્ર $xy = 1$ની વક્રતા ત્રિજ્યા શોધો.

(e) જો $u = x^2 + 3xy + 2y^2$ તો $xu_x + yu_y$ શોધો.

(f) વિધેય $f(x, y) = xy + 2$ માટે $(1, 2)$ બિંદુએ સાતત્ય ચર્ચો.

(g) વિધેય $f(x, y) = \frac{(x - y)}{x + y}$, જો $x + y \neq 0$

$= 0$ જો $x + y = 0$.

માટે $f_x(0, 0)$ અને $f_y(0, 0)$ શોધો.

(h) જો આપેલ દિક્ બિંદુ નિશ્ચિત હોય તો r, s અને t વચ્ચે શું સંબંધ હોય ?

(i) જો $U = e^{\frac{xy}{z}}$ તો $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ શોધો.

Seat No. : _______________

NI-108

December-2015

B.Sc., Sem.-III

Core Course-201 : Mathematics

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) **All** the questions are compulsory and carry equal marks.
(2) Notations are usual, everywhere.
(3) The right hand side figure indicate marks of the question/sub-question.

1. (a) Define limit of function of two variables. Use this definition to find

$$\lim_{(x,y) \to (1, 1)} \frac{x^2 + y^2}{x + y} .$$ **7**

OR

Define iterated limits. Find iterated limits for

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}, \quad \text{if } x + y \neq 0$$

$$= 3, \quad \text{if } x + y = 0 \quad \text{at point } (0, 0).$$

(b) Let function $\varphi(x)$ be continuous at a point $(a, \varphi(a)) = (a, b)$ and

$\lim_{(x,y) \to (a, b)} f(x, y)$ is equal to $L \in R$, then prove that

$\lim_{x \to a} f(x, \varphi(x))$ is equal to L. **7**

OR

Define continuity of function of two variables. Discuss the continuity of function at point (0, 0), if

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{if } x^2 + y^2 \neq 0$$

$$= 0, \quad \text{if } x^2 + y^2 = 0.$$

2. (a) Define directional derivative. If $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ if $x \neq 0, y \neq 0$

$= 0,$ if $x = 0, y = 0$

Then find directional derivative of function f at point (0, 0) along the direction $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **7**

OR

State and prove Young's theorem.

(b) If $u = \log(x^2 + y^2 + z^2)$, then prove that $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{2}{x^2 + y^2 + z^2}$. **7**

OR

Find f_{xx}, f_{yy} and f_{xy} for the function

$f(x, y) = \sin^{-1} \dfrac{x}{y}$, if $y \neq 0$

$= 0,$ if $y = 0$

3. (a) State and prove Euler's theorem for homogeneous function. **7**

OR

If $u = \tan^{-1} \dfrac{x^3 + y^3}{x + y}$, $x + y \neq 0$, then prove that

(1) $x \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \dfrac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$ and

(2) $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin 4u - \sin 2u$.

(b) Find three positive numbers whose sum is 24 and their product is maximum. **7**

OR

If a real function f, defined on an open domain E of R^2 and is differentiable at point $(a, b) \in E$, has an extreme value at (a, b), then prove that $f_x(a, b) = 0$ and $f_y(a, b) = 0$.

4. (a) Find radius of curvature of a curve $y = f(x)$ i.e. $\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$. **7**

OR

Find radius of curvature of a curve $r = f(\theta)$. i.e. in polar equations.

(b) Find radius of curvature of parabola $y^2 = 4ax$. **7**

OR

Find first three terms in the expansion of $f(x, y) = e^{ax} \cos by$ in powers of x and y.

5. Answer in short. (any **seven**) **14**

(a) Define homogeneous function.

(b) State Schwartz theorem.

(c) If $u = \log(x^2 + y^2)$, then prove that $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

(d) Find radius of curvature of the curve $xy = 1$.

(e) If $u = x^2 + 3xy + 2y^2$, then find $xu_x + yu_y$.

(f) Discuss continuity of the following function $f(x, y) = xy + 2$ at point (1, 2).

(g) Find $f_x(0, 0)$ and $f_y(0, 0)$ for the function
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x - y)}{x + y}, & \text{if } x + y \neq 0 \\ 0, & \text{if } x + y = 0. \end{cases}$$

(h) If the double point is CUSP, then what is relation between r, s and t.

(i) If $U = e^{\frac{xy}{z}}$, then find $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.