Seat No. : _______________

JD-116

January-2016

B.Sc., Sem.-I

CC-3 – Paper-101 : Mathematics
(Calculus and Matrix Algebra) (Theory)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ **પાંચ** પ્રશ્નો છે.
(2) પાંચમો પ્રશ્ન ટૂંક જવાબી પ્રશ્નોનો છે.
(3) **બધા** જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.
(4) સંકેતો પ્રચલિત છે.
(5) **બધા** જ પ્રશ્નોના ગુણ સરખા છે.
(6) જમણી બાજુના અંક ગુણ દર્શાવે છે.

1. (a) જો $y = e^{ax} \sin(bx + c)$ હોય તો સાબિત કરો કે $y_n = r^n e^{ax} \sin(bx + c + n\alpha)$; જ્યાં $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \in R$; $n \in N$ અને $a = r\cos\alpha$ અને $b = r\sin\alpha$. **6**

અથવા

અનંત વાસ્તવિક ધન પદોવાળી શ્રેઢી માટે કોશીની બીજ કસોટી લખો અને સાબિત કરો.

(b) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો : **8**

(1) જો $y = x^3 \log x$ હોય તો y_n મેળવો.

(2) જો $y = \cos^{-1} x$; $x \in (-1, 1)$ હોય તો સાબિત કરો કે
$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)\,xy_{n+1} - n^2 y_n = 0$

અથવા

નીચેની શ્રેઢીઓની અભિસારીતા ચર્ચો :

(1) $\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \frac{1}{11.14} + \ldots\ldots\ldots$

(2) $\Sigma \frac{x^n}{n^2 + 1}$

2. (a) કોશીનું મધ્યકમાન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **6**

અથવા

લા'પીટલનો બીજો નિયમ લખો અને સાબિત કરો.

(b) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો : **8**

(1) ટેઈલરનું વિસ્તરણ પ્રમેય લખો અને તેનો ઉપયોગ કરીને $\sin x$ નું $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ ની ચઢતી ઘાતમાં વિસ્તરણ મેળવો.

(2) સાબિત કરો કે $\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1}x < x$; જ્યાં $0 < x$.

અથવા

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) વિધેય $f(x) = x^2 - 2x + 3,\ x \in [0, 2]$ માટે રોલના પ્રમેયનું સમર્થન કરો અને $C \in (0, 2)$ નું મૂલ્ય મેળવો.

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ ની કિંમત મેળવો.

3. (a) હરમિશિયન અને વિ-હરમિશિયન શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો. **2**

શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2+i & -1-i & 3 \\ 1+i & 5 & 4-3i \\ -2i & 1+3i & -2-7i \end{bmatrix}$ ને હરમિશિયન અને વિ-હરમિશિયન શ્રેણિકના સરવાળા રૂપે દર્શાવો. **4**

અથવા

પ્રત્યેક n ક્રમના ચોરસ શ્રેણિક A માટે સાબિત કરો કે $A \cdot (\text{adj } A) = (\text{adj } A) \cdot A = |A| I_n$. **4**

ચોરસ શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ માટે $A \cdot (\text{adj } A) = (\text{adj } A) \cdot A = |A| I_2$ ચકાસો. **2**

(b) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો : **8**

(1) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ને સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિકોના સરવાળા તરીકે અભિવ્યક્ત કરો.

(2) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ -7 & -7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ નો કોટિ શોધો.

અથવા

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો $(AB)^T = B^T A^T$ ચકાસો.

(2) ચોરસ શ્રેણિક $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવો.

4. (a) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ માટે કેલે-હેમિલ્ટનનો પ્રમેય ચકાસીને A^{-1} શોધો. **6**

અથવા

જો λ $(\lambda \neq 0)$ એ વ્યસ્ત સંપન્ન શ્રેણિક $A = (a_{ij})_n$ નું લાક્ષણિક મૂલ્ય હોય તો સાબિત કરો કે

(1) $\frac{1}{\lambda}$ એ A^{-1} નું લાક્ષણિક મૂલ્ય છે.

(2) $\frac{|A|}{\lambda}$ એ adj A નું લાક્ષણિક મૂલ્ય છે.

(b) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો : **8**

(1) ચોરસ શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો મેળવો અને કોઈ એક લાક્ષણિક મૂલ્યને અનુરૂપ લાક્ષણિક સદિશ શોધો.

(2) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ નું લાક્ષણિક સમીકરણ મેળવો અને શ્રેણિક બહુપદી $A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I$ વડે નિરૂપણ પામતો શ્રેણિક શોધો.

અથવા

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) ક્રેમરના નિયમથી સમીકરણો $x + y + z = 3$, $x + 2y + 3z = 4$, $x + 4y + 9z = 6$ નો ઉકેલ મેળવો.

(2) સાબિત કરો કે સમીકરણ સંહતિ $x - 3y + z = -2$, $2x + y - z = 6$, $x + 2y + 2z = 2$ સુસંગત છે.

5. નીચેનામાંથી કોઈપણ **સાત** પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો : **14**

(1) જો $y = \frac{1}{2x + 4}$ હોય તો $y_6(1)$ નું મૂલ્ય મેળવો.

(2) ઘાત શ્રેઢી $\Sigma \left(\sqrt[n]{n} - \frac{1}{2}\right)^n x^n$ ની અભિસાર ત્રિજ્યા મેળવો.

(3) વિધેય $\log_e(1 + x)$ નું વિસ્તરણ x ના પદમાં લખો.

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$ ની કિંમત મેળવો.

(5) પરાવર્ત શ્રેણિકની વ્યાખ્યા ઉદાહરણ સહિત આપો.

(6) જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ x & 0 \end{bmatrix}$ વિસંમિત શ્રેણિક હોય તો x નું મૂલ્ય મેળવો.

(7) જો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ હોય તો A^{-1} મેળવો.

(8) જો ચોરસ શ્રેણિક A નું લાક્ષણિક મૂલ્ય (–3) હોય તો શ્રેણિકો A^2 અને A^3 ના લાક્ષણિક મૂલ્યો કયા થશે ?

(9) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો લખો.

Seat No. : _______________

JD-116

January-2016

B.Sc., Sem.-I

CC-3 – Paper-101 : Mathematics
(Calculus and Matrix Algebra) (Theory)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) There are **five** questions in this question paper.
(2) Fifth question is short answer type.
(3) **All** questions are compulsory.
(4) Symbols are usual.
(5) All questions carry **14** marks.
(6) The right side figure indicate marks of questions.

1. (a) If $y = e^{ax} \sin (bx + c)$, then prove that $y_n = r^n e^{ax} \sin(bx + c + n\alpha)$; where $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \in R$; $n \in N$ and $a = r \cos \alpha$; $b = r \sin \alpha$. **6**

OR

State and prove Cauchy's root test for the convergence of the infinite positive series.

(b) Answer the following questions : **8**

(1) If $y = x^3 \log x$, then find y_n.

(2) If $y = \cos^{-1} x$; $x \in (-1, 1)$, then prove that
$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)\, xy_{n+1} - n^2 y_n = 0$

OR

Discuss the convergence for the following series :

(1) $\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \frac{1}{11.14} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(2) $\Sigma \frac{x^n}{n^2 + 1}$

2. (a) State and prove the Cauchy's mean value theorem. **6**

OR

State and prove L' Pittal's Second Rule.

(b) Answer the following questions : **8**

(1) State Taylor's expansion theorem and using this expand $\sin x$ in power of $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

(2) Prove that $\frac{x}{1 + x^2} < \tan^{-1}x < x$; where $0 < x$.

OR

Answer the following questions :

(1) Verify the Roll's mean value theorem for the function $f(x) = x^2 - 2x + 3$; where $x \in [0, 2]$ and find $C \in (0, 2)$.

(2) Evaluate : $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

3. (a) Define Hermitian and Skew-Hermitian matrices. **2**

Express matrix $A = \begin{bmatrix} 2+i & -1-i & 3 \\ 1+i & 5 & 4-3i \\ -2i & 1+3i & -2-7i \end{bmatrix}$ as a sum of Hermitian and Skew-Hermitian matrices. **4**

OR

For a square matrix A of order n, prove that $A \cdot (\text{adj } A) = (\text{adj } A) \cdot A = |A| I_n$. **4**

Verify $A \cdot (\text{adj } A) = (\text{adj } A) \cdot A = |A| I_2$ for a matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. **2**

(b) Answer the following questions : **8**

(1) Express the matrix $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ as a sum of symmetric and skew-symmetric matrices.

(2) Find the rank of a matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ -7 & -7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

OR

Answer the following questions :

(1) For matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ verify the result $(AB)^T = B^T A^T$.

(2) Find C^{-1} of square matrix $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

4. (a) Verify Caley-Hamilton theorem for the given matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Also using this theorem find A^{-1}. **6**

OR

If λ ($\lambda \neq 0$) is an Eigen value of an invertible matrix $A = (a_{ij})_n$ then show that

(1) $\frac{1}{\lambda}$ is the eigen value of A^{-1}

(2) $\frac{|A|}{\lambda}$ is the eigen value of adj A.

(b) Answer the following questions : **8**

(1) Find the eigen value and eigen vector corresponding to any one eigen value of the square matrix.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) Find the characteristic equation for matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Also find the matrix represented by the matrix polynomial

$A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I$

OR

Answer the following questions :

(1) Solve the equations $x + y + z = 3$, $x + 2y + 3z = 4$, $x + 4y + 9z = 6$ using Cramer's rule.

(2) Prove that the equations $x - 3y + z = -2$, $2x + y - z = 6$, $x + 2y + 2z = 2$ are consistent.

5. Answer the following questions in short : (any **seven**) **14**

(1) If $y = \frac{1}{2x + 4}$ then find the value $y_6(1)$.

(2) Find the radius of convergence of the power series $\Sigma \left(\sqrt[n]{n} - \frac{1}{2} \right)^n x^n$.

(3) Write the expansion of $\log_e(1 + x)$ in terms of x.

(4) Evaluate : $\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$.

(5) Define the transpose matrix with illustration.

(6) If $A = \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ x & 0 \end{bmatrix}$ is skew-symmetric matrix then find the value of x.

(7) Find A^{-1} for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(8) If one eigen value of a square matrix A is (–3), what will be the eigen value of A^2 and A^3 ?

(9) Write the eigen value of matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.