Seat No. : ______________

JM-95

March-2013

Mathematics
Paper – II

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) **બધા** પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.
(2) **બધા** પ્રશ્નોના ગુણ સરખા છે.

1. ગમે તે **ત્રણ**ના જવાબ લખો :

(a) શ્રેણિકના પરાવર્તનની વ્યાખ્યા આપો. જો A એ $m \times n$ અને B એ $n \times p$ પ્રકારનો શ્રેણિક હોય તો સાબિત કરો કે $(AB)^T = B^T A^T$.

(b) ચોરસ શ્રેણિકના વ્યસ્તની વ્યાખ્યા આપો. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો A^{-1} શોધો.

(c) શ્રેણિકના કોટિની વ્યાખ્યા આપો તથા શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ -7 & -7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ નો કોટિ શોધો.

(d) સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિકોની વ્યાખ્યા આપો તથા સાબિત કરો કે કોઈપણ ચોરસ શ્રેણિકને સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિકોના સરવાળા તરીકે દર્શાવી શકાય છે.

(e) જો $A = \begin{bmatrix} \tan\alpha & -1 \\ 1 & \tan\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in R$ હોય તો A^{-1} શોધો.

2. ગમે તે **ત્રણ**ના જવાબ લખો :

(a) કેલે-હેમીલ્ટનનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(b) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ માટે કેલે-હેમીલ્ટન પ્રમેયની ચકાસણી કરો. A^{-1} પણ શોધો.

(c) શ્રેણિકના લાક્ષણિક મૂલ્ય અને લાક્ષણિક સદિશની વ્યાખ્યા આપો તથા શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો અને લાક્ષણિક સદિશો શોધો.

(d) ક્રેમરના નિયમથી $x + y + z = 9$, $2x + 5y + 7z = 52$, $2x + y - z = 0$ ઉકેલો.

(e) શ્રેણિકોની મદદથી $x + y + z = 6$, $2x - y + z = 3$, $x + 3y - z = 4$ ઉકેલો.

3. ગમે તે **બે**ના જવાબ લખો :

(a) ત્રિઘાત સમીકરણના ઉકેલ માટેની કાર્ડનની રીત સમજાવો.

(b) દ્વિવર્ગ સમીકરણ ઉકેલવા માટેની ફેરારીની રીત સમજાવો.

(c) ઉકેલો : $x^3 - 6x^2 - 3x + 26 = 0$.

4. ગમે તે **ત્રણ**ના જવાબ લખો :

(a) શાંકવનું ધ્રુવીય સમીકરણ $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ તારવી કાઢો.

(b) R^3માં ગોલીય યામ પદ્ધતિ સમજાવો તથા ગોલીય યામો અને કાર્ટેઝીય યામો વચ્ચેના સંબંધ તારવી કાઢો.

(c) બિંદુઓ $(2, \pi)$ અને $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ માંથી પસાર થતી સુરેખા પર ધ્રુવમાંથી દોરેલા લંબનો લંબપાદ શોધો.

(d) 'a' ત્રિજ્યાવાળા અને (ρ, α) કેન્દ્રવાળા વર્તુળનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો.

(e) ગોલીય યામોમાં સમીકરણ $\theta = \frac{\pi}{6}$ ને કાર્ટેઝીય યામોમાં ફેરવો.

5. ગમે તે **ત્રણ**ના જવાબ લખો :

(a) R^3 માં $A(x_1, y_1, z_1)$ અને $B(x_2, y_2, z_2)$ વ્યાસાંત બિંદુઓવાળા ગોલકનું સમીકરણ મેળવો.

(b) R^3 માં ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ પરના $p(\alpha, \beta, \gamma)$ બિંદુએ સ્પર્શતલનું સમીકરણ મેળવો.

(c) સમતલ $lx + my + nz = p$ ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ને સ્પર્શે તે માટેનો પ્રતિબંધ અને સ્પર્શબિંદુના યામ શોધો.

(d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z = 3, x + y + 2z = 4$ વર્તુળમાંથી પસાર થતું અને $4x + 3y = 14$ સમતલને સ્પર્શતા ગોલકનું સમીકરણ શોધો.

(e) $2x + 2y - z = 8$ સમતલને સ્પર્શતા અને $(3, 0, -1), (1, -4, 3), (0, -1, -1)$ બિંદુઓમાંથી પસાર થતા ગોલકનાં સમીકરણ શોધો.

6. ગમે તે **ત્રણ**ના જવાબ લખો :

(a) R^3 માં (α, β, γ) બિંદુમાંથી પસાર થતી અને ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ને સ્પર્શતી સર્જક રેખાવાળા પરિસ્પર્શી શંકુનું સમીકરણ મેળવો.

(b) R^3 માં $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ રેખાને સમાંતર અને ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ને સ્પર્શતી સુરેખાના પરિભ્રમણથી રચાતા પરિસ્પર્શી નળાકારનું સમીકરણ મેળવો.

(c) R^3 માં $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ અક્ષ અને r ત્રિજ્યાવાળા સમનળાકારનું સમીકરણ મેળવો.

(d) 3 એકમ ત્રિજ્યાવાળા અને $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$ અક્ષવાળા સમનળાકારનું સમીકરણ શોધો.

(e) સાબિત કરો કે : $33x^2 + 13y^2 - 95z^2 - 144yz - 96zx - 48xy = 0$ સમીકરણ સમશંકુ દર્શાવે છે. તેનો અક્ષ અને અર્ધશિર:કોણ શોધો.

7. ગમે તે **બે**ના જવાબ લખો :

(a) R^3 માં કેન્દ્રીય શાંકવજ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ પરના (α, β, γ) બિંદુએ સ્પર્શતલનું સમીકરણ મેળવો.

(b) સમતલ $lx + my + nz = p$ કેન્દ્રીય શાંકવજ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ ને સ્પર્શે તે માટેનો પ્રતિબંધ અને સ્પર્શબિંદુના યામ શોધો.

(c) સાબિત કરો કે સમતલ $7x + 5y + 3z = 30$ એ ઉપવલયજ $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$ ને સ્પર્શે છે અને તેનું સ્પર્શબિંદુ $(2, 2, 2)$ છે.

Seat No. : _______________

JM-95

March-2013

Mathematics

Paper – II

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) Attempt **all** questions.
(2) Each question carries equal marks.

1. Answer any **three** :
   (a) Define transpose of a matrix. If A is m × n matrix and B is n × p matrix, then prove that $(AB)^T = B^T A^T$.
   (b) Define inverse of a square matrix. If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, then find A^{-1}.
   (c) Define rank of a matrix. Find the rank of the matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ -7 & -7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.
   (d) Define symmetric and skew-symmetric matrices. Prove that any square matrix can be expressed as a sum of a symmetric and skew-symmetric matrices.
   (e) If $A = \begin{bmatrix} \tan\alpha & -1 \\ 1 & \tan\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in R$ then find A^{-1}.

2. Answer any **three** :
   (a) State and prove Caley-Hamilton theorem.
   (b) Verify Caley-Hamilton theorem for the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Find also A^{-1}.
   (c) Define Eigen Value and Eigen Vector of matrix. Find the eigen value and eigen vector for matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.
   (d) Solve $x + y + z = 9$, $2x + 5y + 7z = 52$, $2x + y - z = 0$ by Crammer's rule.
   (e) Solve $x + y + z = 6$, $2x - y + z = 3$, $x + 3y - z = 4$ by matrix.

3. Answer any **two** :
   (a) Explain Cardon's method for solving cubic equation.
   (b) Explain Ferrari's method for solving biquadratic equation.
   (c) Solve : $x^3 - 6x^2 - 3x + 26 = 0$.

4. Answer any **three** :

(a) Derive the polar equation $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ of conic.

(b) Explain spherical co-ordinates system in R^3, and deduce its relations with Cartesian co-ordinates.

(c) Find the foot of the perpendicular drawn from the pole upon the st. line passing through the points $(2, \pi)$ and $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

(d) Find polar equation of a circle, having centre (ρ, α) and radius 'a'.

(e) Transform the spherical equation $\theta = \frac{\pi}{6}$ into Cartesian equation.

5. Answer any **three** :

(a) Find equation of the sphere, having extremities $A(x_1, y_1, z_1)$ and $B(x_2, y_2, z_2)$ of its diameter.

(b) Obtain the equation of the tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ at the point $p(\alpha, \beta, \gamma)$ in R^3.

(c) Find condition that the plane $lx + my + nz = p$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ and point of their contact.

(d) Find the equation of the sphere passing through the circle $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z = 3$, $x + y + 2z = 4$ and touching the plane $4x + 3y = 14$.

(e) Find the equation of the sphere touching the plane $2x + 2y - z = 8$, and passing through the points $(3, 0, -1)$, $(1, -4, 3)$, $(0, -1, -1)$.

6. Answer any **three** :

(a) Find equation of an enveloping cone, having generator touching sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ and passing through a point $p(\alpha, \beta, \gamma)$ in R^3.

(b) Find equation of enveloping cylinder, generated by revolving st. line parallel to $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ and touching the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

(c) Find equation of right circular cylinder having axis $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ and radius r in R^3.

(d) Find equation of right circular cylinder having axis $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$ and radius 3 units.

(e) Prove that the equation
$33x^2 + 13y^2 - 95z^2 - 144yz - 96zx - 48xy = 0$ represents a cone. Find its axis and semi-vertical angle.

7. Answer any **two** :

(a) Find equation of the tangent plane to the central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ at point $p(\alpha, \beta, \gamma)$ on it.

(b) Find condition that the plane $lx + my + nz = p$ touches the central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and point of their contact.

(c) Prove that the plane $7x + 5y + 3z = 30$ touches the ellipsoid $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$, and their point of contact is $(2, 2, 2)$.