



Seat No. : _____

MM-206

May-2025

B.Sc., Sem.-IV

**MAT-204 : Mathematics
(Advanced Calculus-II)
(Old Course)**

Time : 2:30 Hours]

[Max. Marks : 70

સૂચનાઓ : (1) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

(2) ઉત્તરવહીમાં પ્રશ્નપત્રમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પ્રશ્નનો અંક અને પેટા-પ્રશ્નનો અંક લખવો.

(3) જમણી તરફનાં અંક જે તે પ્રશ્નનો ગુણભાર દર્શાવે છે.

1. (A) શોધો : $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} xy dy dx$. 7

1. (B) સંકલનનો ક્રમ બદલો : $\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy dx$ 7

અથવા

1. (A) કાર્ડિઓઇડ $r = a(1 + \cos \theta)$ ની અંદર અને વર્તુળ $r = a$ ની બહાર ઘેરાયેલા વિસ્તારનું ક્ષેત્રફળ શોધો. 7

1. (B) ચામ સમતલો અને સમતલ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ દ્વારા ઘેરાયેલ ઘનનું ઘનફળ શોધો. 7

2. (A) પ્રચલિત સંકેતો મુજબ, સાબિત કરો કે $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ 7

2. (B) જો $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ અને $|\vec{r}| = r$ હોય તો સાબિત કરો કે $\text{div}(r^m \vec{r}) = (m+3)r^m$. 7

અથવા

2. (A) $\text{grad}(\phi)$ અને $\text{div}(\vec{f})$ ની વ્યાખ્યા આપો. જ્યાં ϕ એ સ્કેલર વિધેય છે અને $\vec{f} = f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k}$ એ $D \subset \mathbb{R}^3$ પર વિકલનીય સ્કેલર વિધેય છે, તથા સાબિત કરો કે $\text{div}(\phi\vec{f}) = \phi\text{div}(\vec{f}) + \vec{f} \cdot (\text{grad } \phi)$. 7

2. (B) બીટા - ગામા વિધેયોનો ઉપયોગ કરીને નીચેનાની કિંમત મેળવો : 7

(i) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^3 dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan \theta} d\theta$

3. (A) ગ્રીનનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7

3. (B) શોધો : $\iint_S \vec{f} \cdot \hat{n} dS$, જ્યાં $\vec{f} = (x + y^2, -2x, 2yz)$ અને S એ સમતલ $2x + y + 2z = 6$ થી પ્રથમ ચરણમાં ઘેરાયેલા વિસ્તારનું પૃષ્ઠ છે. 7

અથવા

3. (A) ગાઉસનો પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7
3. (B) $(0, 0)$ થી $(1, 1)$ સુધી $\int_C (x+y)dx + (2x-3y)dy$, ની આપેલ વિસ્તારની સીમા (i) $y = x$,
(ii) $y^2 = x$, અને (iii) $x^2 = y$ પર મેળવો. 7
4. (A) સાબિત કરો કે સુરેખ આંશિક વિકલ સમીકરણ $Pp + Qq = R$ નો વ્યાપક ઉકેલ $F(u, v) = 0$ છે.
જ્યાં F એ સ્વૈચ્છિક વિધેય છે, $u(x, y, z) = c_1$ અને $v(x, y, z) = c_2$ એ સમીકરણ $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$
ના સુરેખ સ્વાયત ઉકેલ છે. 7
4. (B) સમીકરણ $z^2(1 + a^3) = 8(x + ay + b)^3$ માંથી અચળાંકો a અને b નો લોપ કરીને આંશિક વિકલ
સમીકરણ મેળવો. 7

અથવા

4. (A) વ્યાપક ઉકેલ મેળવો : $\frac{y^2z}{x}p + xzq = y^2$. 7
4. (B) સમીકરણ $z = f(xy) + g\left(\frac{x}{y}\right)$ માંથી વિધેય f અને g નો લોપ કરીને આંશિક વિકલ સમીકરણ મેળવો. 7
5. ટૂંકમાં જવાબ લખો : (ગમે તે સાત) 14

(1) શોધો : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \sin \theta} r^3 dr d\theta$.

(2) શોધો : $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^2 xyz dz dx dy$.

(3) શોધો : $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, જ્યાં $x = u - v$, $y = u + v$.

(4) બતાવો કે $n\beta(m+1, n) = mB(m, n+1)$.

(5) જો $\beta(x, 1) = \frac{1}{5}$ તો x નું મૂલ્ય શોધો.

(6) બિંદુ $(1, 2, 3)$ પર $\text{grad}(yz + xz + xy)$ શોધો.

(7) રેખા સંકલનની મદદથી બંધ વિસ્તાર R નું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું સૂત્ર લખો.

(8) સ્ટોકસના પ્રમેયનું વિધાન લખો.

(9) ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ નો અભિલંબ એકમ સદિશ મેળવો.

(10) આંશિક વિકલ સમીકરણ $yp + p^3xy + q^5y = 0$ ના કક્ષા અને પરિમાણ શોધો.

(11) જો $x^2 + y^2 = z^2$, તો $p = \underline{\hspace{2cm}}$ અને $q = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) ઉકેલ લખો : $dx = dy = -dz$.

Seat No. : _____

MM-206

May-2025

B.Sc., Sem.-IV

MAT-204 : Mathematics

(Advanced Calculus-II)

(Old Course)

Time : 2:30 Hours]

[Max. Marks : 70

- Instructions :** (1) All questions are compulsory.
(2) Write question number and sub-question number in answer sheet according to the question paper.
(3) Figures to the right indicate marks of the question.

1. (A) Evaluate : $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} xydydx.$ 7

1. (B) Change the order of $\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dydx$ 7

OR

1. (A) Find the area that lies inside the cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$ and outside the circle $r = a.$ 7

1. (B) Find the volume of solid bounded by the co-ordinate planes and the plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$ 7

2. (A) In usual notations, prove that $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ 7

2. (B) If $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ and $r = |\vec{r}|$, then prove that $\text{div}(r^m \vec{r}) = (m+3)r^m.$ 7

OR

2. (A) Define : $\text{grad}(\phi)$ and $\text{div}(\vec{f})$, where ϕ is a scalar function and $\vec{f} = f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k}$ is a differentiable vector point function on $D \subset \mathbb{R}^3$, also prove that

$$\text{div}(\phi\vec{f}) = \phi \text{div}(\vec{f}) + \vec{f} \cdot (\text{grad } \phi). \quad 7$$

2. (B) Evaluate the following using beta-gamma functions : 7

(i) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^3 dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan \theta} d\theta$

3. (A) State and prove Green's theorem. 7

3. (B) Evaluate : $\iint_S \vec{f} \cdot \hat{n} dS$, where $\vec{f} = (x + y^2, -2x, 2yz)$ and S is the surface of the plane $2x + y + 2z = 6$ in the first octant. 7

OR

3. (A) State and prove Gauss theorem. 7
3. (B) Evaluate $\int_C (x + y) dx + (2x - 3y) dy$, from (0, 0) to (1, 1) over the curves : 7
- (i) $y = x$, (ii) $y^2 = x$, and (iii) $x^2 = y$.

4. (A) Prove that the general solution of the linear partial differential equation $Pp + Qq = R$ is $F(u, v) = 0$, where, F is an arbitrary function and $u(x, y, z) = c_1$ and $v(x, y, z) = c_2$ form a solution of the equations $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$. 7
4. (B) Form a partial differential equation by eliminating the arbitrary constants a and b from the equation $z^2(1 + a^3) = 8(x + ay + b)^3$. 7

OR

4. (A) Find the general solution of $\frac{y^2z}{x}p + xzq = y^2$. 7
4. (B) Form a partial differential equation by eliminating the arbitrary functions f and g from the equation $z = f(xy) + g\left(\frac{x}{y}\right)$. 7

5. Give the answer in brief : (Any Seven) 14

- (1) Evaluate : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \sin \theta} r^3 dr d\theta$.
- (2) Evaluate : $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^2 xyz dz dx dy$.
- (3) Evaluate : $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, where $x = u - v$, $y = u + v$.
- (4) Show that $n\beta(m + 1, n) = mB(m, n + 1)$.
- (5) Find all the value of x , if $\beta(x, 1) = \frac{1}{5}$.
- (6) Find grad $(yz + xz + xy)$ at point $(1, 2, 3)$.
- (7) Write the formula to find area of closed region R by line integral.
- (8) Write the statement of the Stoke's theorem.
- (9) Find the unit normal vector of sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
- (10) Find order and degree of partial differential equation $yp + p^3xy + q^5y = 0$.
- (11) If $x^2 + y^2 = z^2$, then $p = \underline{\hspace{2cm}}$ and $q = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (12) Solve : $dx = dy = -dz$.

Seat No. : _____

MM-206

May-2025

B.Sc., Sem.-IV

MAT-204 : Mathematics

(Linear Algebra-II)

(Theory)

Time : 2:30 Hours]

[Max. Marks : 70

- Instructions :** (1) All questions are compulsory.
(2) Write the question number in your answer book as shown in the question paper.
(3) The figures to the right indicates marks of the question.

1. (a) If $T : U \rightarrow V$ is a linear map, $v_0 \in R(T)$, and if $T(u) = 0_V$ has a non-trivial solution $u \neq 0_U$, then prove that the operator equation $T(u) = v_0$ has an infinite number of solutions. 7
(b) Find the dual of the basis $\{(1,1,1), (1,1,-1), (1,-1,1)\}$ of the vector space V_3 . 7

OR

1. (a) If for $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in V_2$, the map \langle, \rangle is defined as $\langle x, y \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$, then show that \langle, \rangle is an inner product space on V_2 . 7
(b) If a linear map $T : V_3 \rightarrow V_3$ is defined as $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_2 + 2x_3, x_2 + x_3), \forall (x_1, x_2, x_3) \in V_3$, then solve the operator equation $T(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 1)$. 7
2. (a) State and prove the Bessel's inequality. 7
(b) Apply the Gram-Schmidt orthogonalization process on the set $\{(1,1,1), (1,1,-1), (1,-1,1)\}$ in order to get the orthonormal basis of V_3 . 7

OR

2. (a) Prove that a finite dimensional inner product space has an orthogonal basis. 7
(b) If W is a subspace of an inner product space V , then W^\perp is a subspace of V and $W \cap W^\perp = \{0\}$. 7
3. (a) If $i \neq j, \alpha \in \mathbb{R}$ and if $\det : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ is a function satisfy the expected properties of determinant then prove the followings : 7
(i) $\det(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\det(v_1, v_2, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$
(ii) $\det(v_1, v_2, \dots, x_i + y_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = \det(v_1, v_2, \dots, x_i, \dots, v_j, \dots, v_n) + \det(v_1, v_2, \dots, y_i, \dots, v_j, \dots, v_n)$.
- (b) Use Cramer's rule to solve : $x + y + z = 2, x + y - z = 4, x - y + z = -2$. 7

OR

3. (a) State and prove the Cramer's rule for solving a system of linear equations. 7

(b) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, then find $\det A$ by applying the Laplace expansion about the second column of the matrix A. 7

4. (a) If $T : U \rightarrow V$ is a symmetric linear map, then prove that the eigen values of T are real. 7

(b) Diagonalise the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 7

OR

4. (a) State and prove Cayley-Hamilton theorem. 7

(b) Identify the quadric in \mathbb{R}^3 given by $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4yz + 4zx + 4xy = 0$, and convert into canonical form. 7

5. Answer in brief. (Any **Seven**) 14

(1) Define : The space $L(U, V)$ and linear functional.

(2) Define : A bilinear forms.

(3) Is $T(x, y, z) = (0, x, y)$ nilpotent? If yes, what is the degree of nilpotence?

(4) State the triangle inequality.

(5) Find values of k , if $u = (-2, k, k)$ and $v = (3, -1, k)$ are orthogonal vectors by usual inner product in V_3 .

(6) State Parallelogram law for inner product space.

(7) Find $\det A$, if $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(8) If $A = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2024 & 1 \end{bmatrix}$, then find $\det(AB)$.

(9) If $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, then find $\det(A^2 + A)$.

(10) Find eigen values of $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(11) Find eigen values of $A^3 + 2I_2$, of $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

(12) State the Spectral theorem.