Seat No. : ______________

DS-103

December-2025
B.Sc., Sem.-III
CC-202 : Mathematics
(Group Theory)
(New)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચનાઓ : (1) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

(2) સર્વત્ર સંકેતો પ્રચલિત છે.

(3) જમણી બાજુના અંક જે તે પ્રશ્ન/પેટા પ્રશ્નના ગુણભાર દર્શાવે છે.

1. (A) ગણ $G = R - \{-1\}$ ઉપર ક્રિયા $*$ ની વ્યાખ્યા $a * b = a + b + ab$ છે. $a, b \in R - \{-1\}$ તો સાબિત કરો કે $*$ દ્વિકક્રિયા છે અને $(G, *)$ સમૂહ છે. **7**

(B) સમૂહની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે સમૂહ Gમાં **7**

(1) એકમ ઘટકનું અસ્તિત્વ અનન્ય હોય છે.

(2) વ્યસ્ત ઘટકનું અસ્તિત્વ અનન્ય હોય છે.

અથવા

1. (A) સાબિત કરો કે Rનો ઉપગણ $G = \{a + b\ 2/a, b \in Q, a^2 + b^2 = 0\}$ એ બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓના સામાન્ય ગુણાકારથી સમૂહ રચે. **7**

(B) સામ્ય સંબંધની વ્યાખ્યા આપો તથા નક્કી કરો કે જો સંબંધ S માટેની વ્યાખ્યા a b જો a = 4 અને b = 4 હોય તો સંબંધ S એ Z ઉપર સામ્ય સંબંધ છે કે કેમ ? **7**

2. (A) સાન્ત સમૂહ Gના ઉપસમૂહ H માટે લાગ્રાન્જનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

(B) જો H_1 અને H_2 એ Gના ઉપસમૂહ હોય તો સાબિત કરો કે $H_1 \cap H_2$ પણ Gના ઉપસમૂહ છે. શું $H_1 \cup H_2$ હમેશાં Gનું ઉપસમૂહ થશે ? તમાર જવાબનું સમર્થન કરો. **7**

અથવા

2. (A) ફરમાટનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

(B) સમૂહ Gના ઉપસમૂહ H માટે જો $a, b \in G$ તો સાબિત કરો કે $H_a = H_b$ તો અને તો જ $ab^{-1} \in H$ થાય. **7**

3. (A) સાબિત કરો કે સમૂહ Gનો ઉપસમૂહ H નિયત હોય તો અને તો જ $a \in G$ માટે $aHa^{-1} \subset H$ હોય. **7**

(B) જો $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ અને $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

હોય તો $f, g \in S_n$ માટે (1) fog (2) gof (3) fgf^{-1} શોધો. **7**

અથવા

3. (A) S_nમાં પરસ્પર અલગ ચક્રોની વ્યાખ્યા આપો અને સાબિત કરો કે S_n ના બે પરસ્પર અલગ ચક્રો સમક્રમી છે. **7**

(B) જો $g = (1\ \ 7\ \ 3\ \ 13)\ (2\ \ 10\ \ 9) \in S_{13}$ હોય તો O(g) શોધો. **7**

4. (A) સમરૂપતાનું મૂળભૂત પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

(B) ધારો કે H એ સમૂહ Gનો નિયત ઉપસમૂહ છે અને $\varnothing$: (G, o) (G, $*$) સમૂહ સમરૂપતા છે તો સાબિત કરો કે $\varnothing$(H) એ સમૂહ $\varnothing$(G)નો નિયત ઉપસમૂહ છે. **7**

અથવા

4. (A) કેલેનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

(B) સાબિત કરો કે સમાન કક્ષાના કોઈપણ બે સાન્ત ચક્રીય સમૂહ એકરૂપ હોય છે. **7**

5. ગમે તે સાતના ટૂંકમાં જવાબ આપો : **14**

(1) સાબિત કરો કે ચક્રીય સમૂહ હંમેશા સમક્રમી હોય છે.

(2) ચક્ર અને ફેરબદલીની વ્યાખ્યા આપો.

(3) વ્યાખ્યા આપો : એકાંતરસમૂહ અને અવયવસમૂહ

(4) જો $G = \{-1, 1, -i, i\}$ ચક્રીય હોય તો Gના દરેક ઘટકની કક્ષા શોધો.

(5) સમૂહ $(Z_{15}, +15)$ના બધા સર્જકો શોધો.

(6) જો $G = < a >$ એ 12 કક્ષાનું ચક્રીય સમૂહ હોય તો Gના બધા ઉપસમૂહો શોધો.

(7) R ઉપરના એવા સંબંધનું ઉદાહરણ આપો કે જે પરાવર્તિત અને સંક્રમિક હોય પણ સંમિત ન હોય.

(8) યુલરના પ્રમેયનું વિધાન લખો.

(9) વામ અને દક્ષિણ સહગણોની વ્યાખ્યા આપો.

(10) સમરૂપતાના ગર્ભની વ્યાખ્યા આપો અને એક ઉદાહરણ આપો.

(11) R ઉપરની અસંગઠિત દ્વિકક્રિયાનું ઉદાહરણ આપો.

(12) વ્યાખ્યા આપો : ઉપસમૂહ અને સમૂહની કક્ષા

Seat No. : _______________

DS-103

December-2025

B.Sc., Sem.-III

CC-202 : Mathematics

(Group Theory)

(New)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) **All** questions are compulsory.

(2) Notations are usual everywhere.

(3) Figures to the right indicates marks of question/Sub-question.

1. (A) Let $*$ be an operation defined as $a * b = a + b + ab$ for all $a, b \in R - \{-1\} = G$ then show that $*$ is a binary operation and $(G, *)$ is group. **7**

(B) Define a Group. Prove that in a group : **7**

(1) There exists unique identity in G.

(2) There exists unique inverse in G.

OR

1. (A) Prove that the subset $G = \{a + b\ 2/a, b \in Q, a^2 + b^2 = 0\}$ of R is a group under multiplication of two real numbers. **7**

(B) Define an equivalence relation and check whether the relation S defined on Z by $a - b$ if $a = 4$ and $b = 4$ is an Equivalence Relation or not. **7**

2. (A) State and prove Lagrange's theorem for subgroup H of a finite group G. **7**

(B) If H_1 and H_2 are subgroups of G, then prove that $H_1 \cap H_2$ is also a subgroup of G. Is $H_1 \cup H_2$ is always subgroup of G ? Justify your answer. **7**

OR

2. (A) State and prove Fermat's theorem. **7**

(B) For a subgroup H of G and $a, b \in G$, prove that $H_a = H_b$ iff $ab^{-1} \in H$. **7**

3\. (A) Prove that a subgroup H of a group G is normal iff $aHa^{-1} \subset H$ for $a \in G$. **7**

(B) For f, $g \in S_n$ then find (1) fog (2) gof (3) fgf^{-1} where **7**

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

OR

3\. (A) Define a disjoint cycles in S_n. Prove that any two disjoint cycle in S_n are commutative. **7**

(B) If $g = (1\ 7\ 3\ 13)\ (2\ 10\ 9) \in S_{13}$, then find O(g). **7**

4\. (A) State and prove the Fundamental theorem of a Homomorphism. **7**

(B) Let H be a Normal subgroup of a group G and $\varnothing$: (G, o) (G, $*$) be a group homomorphism. Then prove that $\varnothing$(H) is a normal Subgroup of $\varnothing$(G). **7**

OR

4\. (A) State and prove Caley's theorem. **7**

(B) Prove that any two finite cyclic group of the same order are Isomorphic groups. **7**

5\. Attempt any **Seven :** **14**

(1) Prove that cyclic group is always commutative.

(2) Define Cycle and Transposition.

(3) Define Alternative group and Quotient group.

(4) In a cyclic group G = {–1, 1, –i, i}, then find order of each element of G.

(5) Obtain all generators of a group (Z_{15}, +15)

(6) If G = < a > is a cyclic group of order 12, then find all subgroups of G.

(7) Give an example of relation on R which is reflexive and transitive but not symmetric.

(8) State Euler's theorem.

(9) Define left and right cosets.

(10) Define a Kernel of homomorphism and give an example.

(11) Give an example of a non-associative binary operation on R.

(12) Define subgroup and order of Group.

Seat No. : _______________

DS-103

December-2025

B.Sc., Sem.-III

CC-202 : Mathematics
(Linear Algebra-I)
(Theory)
(Old)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચનાઓ : (1) બધા પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.
(2) તમારી ઉત્તરવહીમાં પ્રશ્નોના ક્રમ પ્રશ્નપત્ર પ્રમાણે લખવા.
(3) જમણી બાજુના આંકડા પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

1. (A) વાસ્તવિક સદિશ અવકાશની વ્યાખ્યા આપો. કોઈપણ સદિશ અવકાશ Vમાં સાબિત કરો કે 7
(i) $\alpha\bar{0} = \bar{0}$ પ્રત્યેક અદિશ α માટે
(ii) $0u = \bar{0}$ પ્રત્યેક $u \in V$ અને
(iii) $(-1)u = -u$ પ્રત્યેક $u \in V$

(B) સાબિત કરો કે $(4, 5) \in [\{(2, 1), (3, 0)\}]$ પણ $(4, 5) \notin [\{(2, 1), (6, 3)\}]$. 7

અથવા

1. (A) જો U અને W એ સદિશ અવકાશ Vના ઉપાવકાશ હોય તો સાબિત કરો કે U + W એ Vનો ઉપાવકાશ છે અને $U + W = [U \cup W]$ થાય. 7

(B) સાબિત કરો કે R^n એ સદિશોના સામાન્ય સરવાળા અને અદિશ ગુણાકાર હેઠળ સદિશ અવકાશ છે. 7

2. (A) પરિમાણ પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7

(B) સાબિત કરો કે ગણ $B = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 1, 1)\}$ સદિશ અવકાશ V_3 નો આધાર છે. 7

અથવા

2. (A) જો Vના આધારમાં n સદિશો હોય તો સાબિત કરો p સદિશ ધરાવતો અને $p > n$ માટે તે સુરેખ અવલંબી છે. 7

(B) $B = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\}$ એ V_4ના આધારને સાપેક્ષ $(2, 3, 4, -l)$ના યામ સદિશ શોધો. 7

3. (A) સુરેખ પરિવર્તન $T : U \to V$ના શૂન્યાવકાશની વ્યાખ્યા આપો તથા સાબિત કરો કે તેનો શૂન્યાવકાશ N(T) એ U ઉપાવકાશ છે. 7

(B) $\forall(x, y, z) \in V_3$ માટે $T(x, y, z) = (x, x - y, x + y)$ વડે વ્યાખ્યાયિત સુરેખ પરિવર્તન $T : V_3 \to V_3$ ના વિસ્તાર અને શૂન્યાવકાશ શોધો. 7

અથવા

3. (A) જો સુરેખ પરિવર્તન $T : U \to V$ એક-એક વિધેય હોય અને જો $\{u_1, u_2, u_3, ... u_n\}$ એ Uનો સુરેખ સ્વાયત્ત ઉપગણ હોય તો સાબિત કરો કે $\{T(u_1), T(u_2), T(u_3) ..., T(u_n)\}$ એ Vનો સુરેખ સ્વાયત્ત ઉપગણ થાય. **7**

(B) નીચેના વિધેયો સુરેખ છે કે નહીં તે નક્કી કરો : **7**

(i) $T : V_3 \to V_2$ વડે વ્યાખ્યાયિત $T(x, y, z) = (x + y, y + z), \forall(x, y, z) \in V_3$ છે.

(ii) $S : V_2 \to V_3$ વડે વ્યાખ્યાયિત $S(x, y) = (x, x^2, x^3), \forall(x, y) \in V_2$ છે.

4. (A) સાબિત કરો કે સદિશ અવકાશ $\mu_{m, n}$નું પરિમાણ mn છે. **7**

(B) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ માટે કોટ્યાંક અને શૂન્યાંક મેળવો. **7**

અથવા

4. (A) જો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ હોય અને $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 0, 0)\}$ અને $B_2 = \{(1, 1), (1, -1)\}$ એ અનુક્રમે R^3 અને R^2ના આધાર હોય તો આધાર B_1 અને B_2 ને સંબંધિત શ્રેણિક Aનું સુરેખ પરિવર્તન શોધો. **7**

(B) સુરેખ પરિવર્તન $T : R^2 \to R^2$ જે $T(x_1, x_2\} = (2x_1, 3x_1 - 2x_2)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે તો R^2ના આધાર $B_1 = \{(1, 1), (1, -1)\}$ અને $B_2 = \{e_1, e_2\}$ ને સાપેક્ષ શ્રેણિક $(T : B_1, B_2)$ શોધો. **7**

5. ટૂંકમાં જવાબ આપો : (કોઈપણ સાત) **14**

(i) સદિશ અવકાશ Vમાં સરવાળા માટે તટસ્થ સંખ્યા કઈ છે ?

(ii) શું R^2માં શૂન્યમાંથી પસાર થતી રેખા ઉપાવકાશ થશે કે નહીં ?

(iii) ઉપાવકાશની વ્યાખ્યા આપો.

(iv) આધારની વ્યાખ્યા આપો.

(v) સદિશના સુરેખ સંયોજનની વ્યાખ્યા આપો.

(vi) જો $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ હોય તો Bનો વિસ્તૃતિ ગણ શોધો.

(vii) જો $T : U \to U$ એ તદેવ વિધેય હોય તો R(T) શોધો.

(viii) સુરેખ પરિવર્તનની વ્યાખ્યા આપો.

(ix) જો $T : U \to V$ એ સુરેખ પરિવર્તન હોય તો R(T) કોનો ઉપવકાશ બનશે U નો કે V નો ?

(x) શ્રેણિકના કોટીની વ્યાખ્યા આપો.

(xi) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ નો શૂન્યાંક શોધો.

(xii) જો શ્રેણિકના $A = (a_{ij})_{m \times n}$ અને $B = (b_{ij})_{m \times n}$ હોય તો શ્રેણિક (A + B)ની કક્ષા શોધો.

Seat No. : _______________

DS-103

December-2025

B.Sc., Sem.-III

CC-202 : Mathematics
(Linear Algebra-I)
(Theory)
(Old)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) **All** questions are compulsory.
(2) Write the question number in your answer book as shown in the question paper.
(3) The figures to the right indicates marks of the question.

1. (A) Define real vector space. In any vector space V, prove that **7**
   (i) $\alpha\bar{0} = \bar{0}$ for every scalar α.
   (ii) $0u = \bar{0}$ for every $u \in V$.
   (iii) $(-1)u = -u$ for every $u \in V$.
   (B) Prove that $(4, 5) \in [\{(2, 1), (3, 0)\}]$ but $(4, 5) \notin [\{(2, 1), (6, 3)\}]$. **7**

OR

1. (A) If U and W are two subspaces of a vector space V, then prove that U + W is subspace of V and $U + W = [U \cup W]$. **7**
   (B) Prove that R^n is a vector space under vector addition and scalar multiplication of the vectors. **7**

2. (A) State and prove dimension theorem. **7**
   (B) Prove that the set $B = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 1, 1)\}$ is basis for vector space V_3. **7**

OR

2. (A) If V has basis of n vectors, then prove that every set of p vectors with $p > n$, is linearly dependent. **7**
   (B) Find the coordinate vector of the vector (2, 3, 4, –l) relative to the ordered basis $B = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\}$ for V_4. **7**

3. (A) Define the kernel of a linear map $T : U \to V$ and prove that N(T) is a subspace of U. **7**
   (B) Find the range and kernel of the linear map $T : V_3 \to V_3$ defined by $T(x, y, z) = (x, x - y, x + y), \forall (x, y, z) \in V_3$. **7**

OR

3. (A) Let $T : U \to V$ be a linear map. If T is one-one and $\{u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots, u_n\}$ is linearly independent set of U, then prove that $\{T(u_1), T(u_2), T(u_3) \ldots, T(u_n)\}$ is linearly independent set of V. **7**

(B) Determine whether the following maps are linear or not : **7**

(i) $T : V_3 \to V_2$ defined by $T(x, y, z) = (x + y, y + z), \forall (x, y, z) \in V_3$.

(ii) $S : V_2 \to V_3$ defined by $S(x, y) = (x, x^2, x^3), \forall (x, y) \in V_2$.

4. (A) Prove that the dimension of the vector space $\mu_{m, n}$ is mn. **7**

(B) Find rank and nullity of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. **7**

OR

4. (A) Find the linear map associated with the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ relative to the bases $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 0, 0)\}$ and $B_2 = \{(1, 1), (1, -1)\}$ of R^3 and R^2 respectively. **7**

(B) Let a linear transformation $T : R^2 \to R^2$ be defined by $T(x_1, x_2\} = (2x_1, 3x_1 - 2x_2)$. Then find the matrix $(T : B_1, B_2)$ relative to the bases $B_1 = \{(1, 1), (1, -1)\}$ and $B_2 = \{e_1, e_2\}$ of R^2. **7**

5. Answer in brief : (Any **Seven**) **14**

(i) What is the additive identity in vector space V ?

(ii) If a line passes through the origin in R^2, then is it subspace or not ?

(iii) Define subspace.

(iv) Define Basis.

(v) Define linear combination of vectors.

(vi) If $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, then find span of B.

(vii) Let $T : U \to U$ be an identity linear map, then find R(T).

(viii) Define linear transformation.

(ix) Let $T : U \to V$ be linear map then R(T) forms a subspace of U or V ?

(x) Define : Rank of matrix.

(xi) Find the nullity of matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

(xii) Let matrix $A = (a_{ij})_{m \times n}$ and $B = (b_{ij})_{m \times n}$, then find the order of the matrix (A + B).