Seat No. : _______________

DR-103

December-2025

B.Sc., Sem.-III

MAT-201 : Mathematics

(Linear Algebra-1)

(New Course)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચનાઓ : (i) સંજ્ઞાઓ અને પરિભાષાઓ મૂળભૂત છે.

(ii) બધા જ પ્રશ્નો ફરજીયાત છે.

(iii) દરેક પ્રશ્ન સરખાં ગુણ ધરાવે છે.

1. (a) જો S એ સદિશ અવકાશ Vનો અરિક્ત ઉપગણ હોય, તો સાબિત કરો કે વિસ્તૃતિ ગણ [S] એ Sનો સમાવેશ કરતો Vનો સૌથી નાનો ઉપાવકાશ છે. **7**

1. (b) જો $V = M_2(\mathbb{R})$ અને $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + b + 2c + d = 0 \right\}$ હોય, તો સાબિત કરો કે W એ સદિશ અવકાશ Vનો ઉપાવકાશ થાય. **7**

અથવા

1. (a) જો U અને W સદિશ અવકાશ Vના બે ઉપાવકાશ હોય, તો સાબિત કરો કે U + W એ Vનો ઉપાવકાશ થાય, તથા $U + W = [U \cup W]$ થાય. **7**

1. (b) સાબિત કરો કે સદિશ અવકાશના કોઈપણ બે ઉપાવકાશનો છેદગણ પણ ઉપાવકાશ થાય. પણ યોગગણ ઉપાવકાશ ન થાય. **7**

2. (a) જો U અને W સાંત પરિમાણીય સદિશ અવકાશ Vનાં બે ઉપાવકાશો હોય, તો સાબિત કરો કે

$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$. **7**

2. (b) ગણ $\{(1, 0, 1, 0), (0, -1, 1, 0)\}$ એ સદિશ અવકાશ $\mathbb{R}^4$ નો સુરેખ સ્વાયત ઉપગણ છે. તો તેને $\mathbb{R}^4$નાં આધાર સુધી લંબાવો. **7**

અથવા

2. (a) જો $B = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ હોય, અને $[B] = V$ હોય, તો સાબિત કરો કે નીચે આપેલ બે શરતો સમાનાર્થ છે : **7**

(i) $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ એ સુરેખ સ્વાયત ગણ છે.

(ii) જો $v \in V$, હોય તો vને $v_1, v_2 \ldots\ldots v_n$ ના સુરેખ સંયોજન તરીકે એક જ રીતે દર્શાવી શકાય. એટલે કે $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$

2. (b) ગણ $\{(1, 2, 3), (-1, 0, 5), (-1, 4, 21), (0, 0, 7), (-7, -1, 6)\} \in \mathbb{R}^3$ જેનો વિસ્તૃતિ ગણ હોય તે $\mathbb{R}^3$ નાં ઉપાવકાશનો આધાર અને પરિમાણ મેળવો. **7**

3. (a) કોટી-શૂન્યાંક પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

3. (b) સુરેખ પરિવર્તન $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ કે જ્યાં

$T(1, 1, 0) = (1, 0), T(1, 0, 1) = (0, 1), T(0, 1, 1) = (1, -1)$ હોય, તો

$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ માટે $T(a, b, c)$ શોધો અને શૂન્યાવકાશ $N(T)$ શોધો. **7**

અથવા

3. (a) $T : U \to V$ એ સુરેખ પરિવર્તન છે. સાબિત કરો કે

(i) T એક-એક વિધેય હોય તો અને તો જ $N(T) = \{0_U\}$

(ii) જો $[u_1, u_2, \ldots, u_n] = U$ તો સાબિત કરો કે $\mathbb{R}(T) = [T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)]$. **7**

3. (b) સુરેખ વિધેય $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ કે જે $T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z),\ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ થી વ્યાખ્યાયિત છે તો Tનો વિસ્તાર અને શૂન્યાવકાશ મેળવો. **7**

4. (a) જો $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ એ $m \times n$ પ્રકારના શ્રેણિકોનો ગણ હોય, તો સાબિત કરો કે, સદિશ અવકાશ $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ નો પરિમાણ *mn.* છે. **7**

4. (b) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ નો કોટી અને શૂન્યાંક મેળવો. **7**

અથવા

4. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ એ આપેલ શ્રેણિક છે. જો $B_1 = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ અને $B_2 = \{(1, 1, 1,), (1, -1, 1), (0, 0, 1)\}$ એ અનુક્રમે $\mathbb{R}^2$ અને $\mathbb{R}^3$નાં આધારો હોય, તો Aને અનુરૂપ અને B_1 અને B_2 ની સાપેક્ષે સુરેખ પરિવર્તન મેળવો. **7**

4. (b) સુરેખ પરિવર્તન $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ એ $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + bx + cx^2 + dx^3$ થી વ્યાખ્યાયિત હોય, તો મૂળભૂત આધારોની સાપેક્ષે Tને અનુરૂપ શ્રેણિક મેળવો. **7**

5. ટૂંકમાં જવાબ આપો : (કોઈપણ **સાત**) **14**

(1) સદિશ અવકાશના ઉપાવકાશની જરૂરી અને પર્યાપ્ત શરતો લખો.

(2) (1, 1, 0) એ વિસ્તૃતિ ગણ [(1, 2, 1), (1, 1, –1), (4, 5, –2)] માં છે કે નહિ ચકાસો.

(3) $\mathbb{R}^3$ એ વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ છે અને $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 0\}$ તો W એ $\mathbb{R}^3$નો ઉપાવકાશ છે કે નહિ ચકાસો. કારણ આપો.

(4) સદિશ અવકાશમાં આધાર અને પરિમાણ વ્યાખ્યાયિત કરો.

(5) $\mathbb{R}^3$નો ઉપગણ {(1, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 2, 3)} એ સુરેખ સ્વાયત છે કે નહિ ચકાસો. તમારા જવાબને સમર્થન આપો.

(6) $\mathbb{R}^2$નાં ઉપગણ $\{(0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$ ના વિસ્તૃતિ ગણનો આધાર મેળવો.

(7) જો $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ એ સુરેખ એક-એક વિધેય હોય તો T નો વિસ્તાર મેળવો.

(8) જો $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ એ સુરેખ પરિવર્તન હોય તો શું T એ વ્યાપ્ત વિધેય થઈ શકે ? તમારા જવાબને સમર્થન આપો.

(9) સુરેખ પરિવર્તન $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, b + c, c)$ થી વ્યાખ્યાયિત થતાં વિધેયનો શૂન્યાવકાશ N(T) મેળવો.

(10) શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ એ $n \times n$ કક્ષાનો શ્રેણિક છે કે જ્યાં $a_{ij} = 3, \forall i, j$ છે, તો Aનો શૂન્યાંક મેળવો.

(11) જો A એ 5×4 કક્ષાનો શૂન્યેત્તર શ્રેણિક હોય તો બતાવો કે Aનાં હાર સદિશો $\mathbb{R}^4$માં સુરેખ અવલંબી થાય.

(12) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ હોય, તો શૂન્યાંક $n(A)$ મેળવો.

Seat No. : _______________

DR-103

December-2025

B.Sc., Sem.-III

MAT-201 : Mathematics

(Linear Algebra-1)

(New Course)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (i) Notations and terminologies are standard.

(ii) **All** the questions are compulsory.

(iii) Each question carries equal marks.

1. (a) Let S be a non-empty subset of a vector space V, then prove that [S] is the smallest subspace of V containing S. **7**

1. (b) Let $V = M_2(\mathbb{R})$ and $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + b + 2c + d = 0 \right\}$. Prove that W is a subspace of a vector space V. **7**

OR

1. (a) If U and W are two subspaces of a vector space V, then prove that U + W is a subspace of V, and $U + W = [U \cup W]$. **7**

1. (b) Prove that intersection of two subspaces of a vector space is also a subspace but union is not. Justify. **7**

2. (a) Let U and W are two subspaces of a finite dimensional vector space V, then prove that $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$. **7**

2. (b) Let $\{(1, 0, 1, 0), (0, -1, 1, 0)\}$ be a linearly independent subset of the vector space $\mathbb{R}^4$. Extend it up to a basis of $\mathbb{R}^4$. **7**

OR

2. (a) Let $B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ span vector space V, then prove that the following two conditions are equivalent : **7**

(i) $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ is a linearly independent set.

(ii) If $v \in V$, then the expression $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ is unique.

2. (b) Find basis and dimension of the subspace spanned by set

$\{(1, 2, 3), (-1, 0, 5), (-1, 4, 21), (0, 0, 7), (-7, -1, 6)\}$ in $\mathbb{R}^3$. **7**

3. (a) State and prove Rank-Nullity Theorem. **7**

3. (b) Let $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ be a linear transformation defined by $T(1, 1, 0) = (1, 0)$, $T(1, 0, 1) = (0, 1)$, $T(0, 1, 1) = (1, -1)$. For $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, obtain $T(a, b, c)$ and find $N(T)$. **7**

OR

3. (a) Let $T : U \to V$ be a linear map. Prove that

(i) T is one-one if and only if $N(T) = \{0_U\}$

(ii) If $[u_1, u_2, \dots, u_n] = U$, then $\mathbb{R}(T) = [T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)]$. **7**

3. (b) Find range and kernel of the linear map $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ defined as

$T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z), \ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. **7**

4. (a) Let $M_{m\times n}$ ($\mathbb{R}$) be the set of all m × n type of matrices. Prove that the dimension of a vector space $M_{m\times n}$ ($\mathbb{R}$) is *mn*. **7**

4. (b) Find the rank and nullity of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **7**

OR

4. (a) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ be a given matrix. $B_1 = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ and $B_2 = \{(1, 1, 1,), (1, -1, 1), (0, 0, 1)\}$ be bases of $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$ respectively. Find the linear transformation associated to the matrix A with respect to ordered bases B_1 and B_2. **7**

4. (b) Let $T : M_2 (\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ be a linear transformation defined by

$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Obtain Matrix of T with respect to standard bases of $M_2(\mathbb{R})$ and $P_3(\mathbb{R})$. **7**

5. Answer in brief : (Any **Seven**) **14**

(1) State necessary and sufficient condition to be a subspace of a vector space.

(2) Check whether $(1, 1, 0) \in [(1, 2, 1), (1, 1, -1), (4, 5, -2)]$. Justify.

(3) Let $\mathbb{R}^3$ be a real vector space and $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 0\}$. Is W subspace of $\mathbb{R}^3$? Give reason.

(4) Define basis and dimension of a vector space.

(5) Check whether the set $\{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 2, 3)\}$ of $\mathbb{R}^3$ is linearly independent or not. Justify your answer.

(6) Find the basis of a subspace of $\mathbb{R}^2$, spanned by the set of vectors

$\{(0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$.

(7) Let $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a one-one linear map, then what is range of T ?

(8) Let $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation. Can T be an onto ? Justify.

(9) Let $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation defined as

$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, b + c, c)$, then find N(T).

(10) Let matrix $A = [a_{ij}]$ be an $n \times n$ matrix such that $a_{ij} = 3$, $\forall i$ and j, then

find nullity of A.

(11) If A is non-zero 5×4 matrix, then show that row vectors of A are linearly dependent in $\mathbb{R}^4$.

(12) In $M_2(\mathbb{R})$, if $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, then find $n(A)$.

Seat No. : _______________

DR-103

December-2025

B.Sc., Sem.-III

MAT-201 : Mathematics

(Advanced Calculus-I)

(Old Course)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચનાઓ : (i) તમામ પ્રશ્નો ફરજીયાત છે અને સમાન ગુણભાર ધરાવે છે.

(ii) જમણી તરફના અંક જે તે પ્રશ્ન/પેટા પ્રશ્નના ગુણભાર દર્શાવે છે.

1. (a) વિધેય ϕ એ બિંદુ $x = a$ આગળ સતત છે અને $\phi(a) = b$ આપેલ છે. જો લક્ષ $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = l$, $l \in \mathbb{R}$, અસ્તિત્વ ધરાવતું હોય તો સાબિત કરો કે, લક્ષ $\lim_{x \to a} f(x, \phi(x))$ પણ અસ્તિત્વ ધરાવે અને તે l બરાબર થાય છે. **7**

1. (b) વિધેય $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ નું બિંદુ (0, 0) પાસે પુનરાવર્તિત લક્ષ મેળવો. **7**

અથવા

1. (a) વિધેયો $f(x, y)$ અને $g(x, y)$ દ્વિચલ વિધેયો અનુક્રમે પ્રદેશો D_1 અને D_2 પર વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે, જો $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = l_1$ અને $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = l_2$, જ્યાં $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ તો $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f. g)(x, y) = l_1 l_2$. **7**

1. (b) સાબિત કરો કે, વિધેય $f(x, y)$ ઉગમબિંદુ (0, 0) પર સતત છે, જ્યાં

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$ **7**

2. (a) જો $z = f(x, y)$ અરિક્ત વિવૃત ગણ $E \subset \mathbb{R}^2$ પર વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય છે. જો f_x અને f_y અસ્તિત્વ ધરાવે તેમજ E પર સતત હોય તો, સાબિત કરો કે

(i) વિધેય f, E પર વિકલનીય છે.

(ii) $\delta z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\delta y + \varepsilon\rho$ જ્યાં $\varepsilon \to 0$ જ્યારે $\rho = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} \to 0$. **7**

2. (b) જો $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$ તો સાબિત કરો કે $f(0, 0)$ પર સતત અને વિકલનીય છે. **7**

અથવા

2. (a) સ્વાર્ત્ઝનો પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

2. (b) જો $u = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{x-y}$, તો $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ સાબિત કરો. **7**

3. (a) જો $u = \phi(H)$, m કક્ષાના સમપરિમાણીય વિધેય $H = f(x, y)$ નું વિધેય હોય કે જેના બીજી કક્ષાના આંશિક વિકલો અસ્તિત્વ ધરાવતા હોય તો, સાબિત કરો. **7**

(i) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = m\dfrac{F(u)}{F'(u)} = G(u), F'(u) \neq 0$.

(ii) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G(u)(G'(u)-1)$

જ્યાં $H = f(x, y) = F(u) = \phi^{-1}(u)$.

3. (b) ત્રણ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ શોધો કે જેમનો સરવાળો 24 હોય અને તેમનો ગુણાકાર મહત્તમ હોય. **7**

અથવા

3. (a) વિવૃત ગણ $E \subset \mathbb{R}^2$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય f ને કોઈ બિંદુ $(a, b) \in E$ પર સ્થાનીય સ્થિર મૂલ્યો ધરાવે તે માટેની જરૂરી શરત લખો અને સાબિત કરો. **7**

3. (b) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ માટે ઓઈલરનું પ્રમેય ચકાસો. **7**

4. (a) વક્ર $f(x, y) = 0$નાં દ્વિક બિંદુઓના અસ્તિત્વ માટેની જરૂરી અને પર્યાપ્ત શરત લખો અને સાબિત કરો. **7**

4. (b) વિધેય $f(x, y) = \frac{y^2}{x^3}$ નું $(x - 1)$ અને $(y + 2)$ ની ઘાતોમાં વિસ્તરણ આપો. **7**

અથવા

4. (a) વક્ર $y = f(x)$ની વક્રતાત્રિજ્યા શોધવાનું સૂત્ર તારવો. **7**

4. (b) વક્ર $(y - 2)^2 = x(x - 1)$નાં દ્વિક બિંદુઓના પ્રકારો વર્ણવો. **7**

5. કોઈપણ સાત લખો : **14**

(1) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy + 2}{x^2 + y^2}$ શોધો.

(2) બિંદુ (a, b)ના ચોરસ સામીપ્યની વ્યાખ્યા આપો.

(3) બતાવો કે, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ નું અસ્તિત્વ નથી.

(4) જો $f(x, y) = x \log y + y \log x$, તો $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ મેળવો.

(5) સતત હોય પરંતુ વિકલનીય ન હોય તેવા દ્વિચલ વિધેયનું એક ઉદાહરણ આપો.

(6) $a \in \mathbb{R}$ ની કઈ કિંમતો માટે વિધેય $e^{ax} + e^{ay}$ સ્વરિત છે ?

(7) સમપરિમાણીય વિધેય $f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ ની કક્ષા શોધો.

(8) વિધેય $z = xy$નું સેડલ બિંદુ (Saddle Point) શોધો.

(9) જો $f(x, y) = \log(xy)$, $x, y \in \mathbb{R}^+$ હોય, તો f_{xy} અને f_{yx} બરાબર છે કે નહી તે ચકાસો.

(10) વ્યાખ્યા આપો : વક્રતા

(11) મેકલોરીનનું પ્રમેય લખો.

(12) વક્ર $x^2 + y^2 = a^2$ ની વક્રતાત્રિજ્યા શોધો.

Seat No. : _______________

DR-103

December-2025

B.Sc., Sem.-III

MAT-201 : Mathematics

(Advanced Calculus-I)

(Old Course)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (i) **All** questions are compulsory and carry equal marks.

(ii) Figures to the right indicate marks of the questions.

1. (a) Let the function ϕ is continuous at $x = a$ and $\phi(a) = b$. If $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ exists and is equal to $l \in \mathbb{R}$, then prove that $\lim\limits_{x \to a} f(x, \phi(x))$ also exists and equal to l. **7**

1. (b) Find iterated limits of the function $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ at a point (0, 0). **7**

OR

1. (a) Let $f(x, y)$ and $g(x, y)$ be functions of two variables defined on domains D_1 and D_2 respectively. Then prove that if $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = l_1$ and $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = l_2$, where $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, then $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (f.\, g)(x, y) = l_1\, l_2$. **7**

1. (b) Show that the function $f(x, y)$ is continuous at the origin, where

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$ **7**

2. (a) If $z = f(x, y)$ is a real function defined on non-empty open set $E \subset \mathbb{R}^2$. If f_x and f_y exist and continuous on E, then prove that

(i) The function f is differentiable on E.

(ii) $\delta z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\delta y + \varepsilon\rho$ where $\varepsilon \to 0$ as $\rho = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} \to 0$. **7**

2. (b) If $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$,

then prove that f is continuous and differentiable at (0, 0). **7**

OR

2. (a) State and prove Schwartz's theorem. **7**

2. (b) If $u = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{x-y}$, then prove that $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$. **7**

3. (a) If $u = \phi$ (H) is a function of a homogeneous function $H = f(x, y)$ of degree m whose partial derivatives of second order exist, then prove that **7**

(i) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = m\dfrac{F(u)}{F'(u)} = G(u), F'(u) \neq 0$.

(ii) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G(u)(G'(u) - 1)$,

where $H = f(x, y) = F(u) = \phi^{-1}(u)$.

3. (b) Find three positive integers whose sum is 24 and their product is maximum. **7**

OR

3. (a) State and prove necessary condition for the function f defined on an open set $E \subset \mathbb{R}^2$ to have extreme values at a point $(a, b) \in E$. **7**

3. (b) Verify Euler's theorem for $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$. **7**

4. (a) State and prove necessary condition for the existence of a double point on the curve $f(x, y) = 0$. **7**

4. (b) Expand $f(x, y) = \frac{y^2}{x^3}$ upto second degree in powers of $(x - 1)$ and $(y + 2)$. **7**

OR

4. (a) Derive the formula to find radius of curvature of a curve $y = f(x)$. **7**

4. (b) Determine the nature of the double point of the curve $(y - 2)^2 = x(x - 1)$. **7**

5. Attempt Any **Seven**. **14**

(1) Find : $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy + 2}{x^2 + y^2}$.

(2) Define : Rectangular neighbourhood of a point (a, b).

(3) Show that $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ does not exist.

(4) If $f(x, y) = x \log y + y \log x$, then obtain $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

(5) Give one example of a function of two variables which is continuous but not differentiable.

(6) For what value(s) of $a \in \mathbb{R}$ is the function $e^{ax} + e^{ay}$ harmonic ?

(7) Find the degree of the homogeneous function $f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

(8) Find saddle point for the function $z = xy$.

(9) If $f(x, \mathrm{y}) = \log(x\mathrm{y})$, x, $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^+$, then verify whether f_{xy} and f_{yx} are equal.

(10) Define : curvature.

(11) State Maclaurin's theorem.

(12) Find the radius of curvature of the curve $x^2 + \mathrm{y}^2 = \mathrm{a}^2$.
