

MD-202

May-2025

B.Sc., Sem.-II

MAT-103 : Mathematics

(Calculus – II) (New)

Time : 2:30 Hours]

[Max. Marks : 70

- સૂચનાઓ : (1) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.
 (2) પદો અને ચિહ્નો પ્રમાણિત છે.
 (3) જમણી બાજુ આપેલા અંક કુલ ગુણ દર્શાવે છે.

1. (a) ધારો કે વાસ્તવિક વિધેય f એ વિવૃત અંતરાલ $E \subset \mathbb{R}^2$ પર વ્યાખ્યાયિત છે. જો f_x અને f_y બિંદુ (x, y) આગળ અસ્તિત્વ ધરાવે અને સતત હોય તો સાબિત કરો કે f બિંદુ (x, y) આગળ વિકલનીય છે. 7

- (b) નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત વિધેયની $(0,0)$ બિંદુએ વિકલનીયતા ચકાસો :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^6}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

અથવા

1. (a) સ્વાર્ઝનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7
 (b) જો $u = f\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right)$, હોય તો સાબિત કરો કે $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$. 7

2. (a) સમપરિમાણ વિધેય માટે ઓઈલરનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7
 (b) જો $f(x, y) = \sqrt{x^2 - xy}$, હોય તો સાબિત કરો કે $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. 7

અથવા

2. (a) જો $u = \phi(H)$ હોય તથા $H = f(x, y)$ એ m કક્ષાનું સમપરિમાણ વિધેય છે કે જેના દ્વિતીય કક્ષાના આંશિક વિકલનનું અસ્તિત્વ હોય તો સાબિત કરો કે 7

(i) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = m \frac{F(u)}{F'(u)} = G(u)$ જ્યાં, $F'(u) \neq 0$

(ii) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G(u) [G'(u) - 1]$

જ્યાં $H = f(x, y) = F(u) = \phi^{-1}(u)$.

- (b) 24નું 3 ભાગમાં વિભાજન કરો કે જેથી ગુણાકાર મહત્તમ થાય. 7

3. (a) બે ચલના વિધેય માટે ટેઈલરનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7
 (b) દ્વિ-મિત બિંદુ નક્કી કરો : $x^3 + 3x^2 - y^2 + 3x - 2y = 0$. 7

અથવા

3. (a) વક્ર $y = f(x)$ માટે વક્રતાત્રિજ્યા મેળવો. i.e. $\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$. 7
 (b) $r = a(1 - \cos \theta)$ માટે વક્રતાત્રિજ્યા મેળવો. 7

4. (a) સંકલિત મેળવો : $\int_0^3 \int_0^1 (x^2 + 3y^2) dy dx$. 7

- (b) સંકલિત મેળવો : $\int \int_R xy dy dx$ જ્યાં R, X-અક્ષ, રેખા $x = 2a$ તથા પરવલય $x^2 = 4ay$ વડે આવૃત પ્રદેશ છે. 7

અથવા

4. (a) સંકલિત મેળવો : $\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy dx$. 7

- (b) સંકલિત ચલનો ક્રમ બદલો : 7
 $\int_0^3 \int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx dy$

5. નીચેના પૈકી કોઈપણ સાતના ઉત્તર આપો : 14

- (1) જો $u = \log(x^2 + y^2)$, હોય તો $u_{xx} + u_{yy}$ નું મુલ્ય મેળવો.
 (2) સમપરિમાણ વિધેયની વ્યાખ્યા આપો.
 (3) જો $u = y^2 - 4ax$, $x = at^2$, $y = 2at$, તો $\frac{du}{dt}$ મેળવો.
 (4) જો $z = x^3 \cos \frac{y}{x} + y^3 \sin \frac{x}{y}$, તો $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ મેળવો.
 (5) બે ચલના વિધેય માટે વિકલનીયતા વ્યાખ્યાયિત કરો.
 (6) બહુમિત બિંદુની વ્યાખ્યા આપો.
 (7) જો $u = \cos xy$, તો $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ મેળવો.
 (8) હારમોનિક વિધેયની વ્યાખ્યા આપો તથા $f(x, y) = x^3 y^3$ હાર્મોનિક છે કે નહિ તે ચકાસો.
 (9) પરવલય $y = 4x^2$ માટે વક્રતાત્રિજ્યા મેળવો.
 (10) ધારો કે $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 z + y^3 z^2 - xyz$, છે. $f_x(1, 0, 3)$ મેળવો.
 (11) જો બહુમિત બિંદુ નિરુપંદ હોય તો r, s, t વચ્ચેનો સંબંધ જણાવો.
 (12) બે ચલ માટે મેકલોરિનના પ્રમેયનું વિધાન લખો.

MD-202

May-2025

B.Sc., Sem.-II**MAT-103 : Mathematics****(Calculus – II) (New)****Time : 2:30 Hours]****[Max. Marks : 70**

- Instructions :** (1) All the questions are compulsory.
 (2) Notations and terminologies are standard.
 (3) Figures to the right indicate full marks.

1. (a) Let f be a real function defined on an open set $E \subset \mathbb{R}^2$. If f_x and f_y exist and continuous at point (x, y) , then prove that f is differentiable at point (x, y) . 7

- (b) Discuss the differentiability defined by $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y^6}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ at point $(0,0)$. 7

OR

1. (a) State and prove Schwartz's theorem. 7

- (b) If $u = f\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right)$, then prove that $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$. 7

2. (a) State and prove Euler's theorem for homogeneous function. 7

- (b) If $f(x, y) = \sqrt{x^2 - xy}$, then prove that $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. 7

OR

2. (a) If $u = \phi(H)$ is a function of a homogeneous function $H = f(x, y)$ of degree m whose partial derivatives of second order exist, then 7

(i) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = m \frac{F(u)}{F'(u)} = G(u)$ say, $F'(u) \neq 0$

(ii) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G(u) [G'(u) - 1]$

Where $H = f(x, y) = F(u) = \phi^{-1}(u)$.

- (b) Divide 24 into three parts such that their product shall be maximum. 7

3. (a) State and prove Taylor's theorem for function of two variables. 7
 (b) Find the double points of $x^3 + 3x^2 - y^2 + 3x - 2y = 0$. 7

OR

3. (a) Find radius of curvature of a curve $y = f(x)$ i.e. $\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$. 7
 (b) Find the radius of curvature $r = a(1 - \cos \theta)$. 7

4. (a) Evaluate : $\int_0^3 \int_0^1 (x^2 + 3y^2) dy dx$. 7

- (b) Evaluate : $\int \int_R xy dy dx$ over the region enclosed by the X-axis, the line $x = 2a$ and the parabola $x^2 = 4ay$. 7

OR

4. (a) Evaluate : $\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy dx$. 7

- (b) Change the order of integration : 7
 $\int_0^3 \int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx dy$

5. Attempt any **seven** : 14

- (1) If $u = \log(x^2 + y^2)$, then obtain $u_{xx} + u_{yy}$.
- (2) Define : Homogeneous function.
- (3) If $u = y^2 - 4ax$, $x = at^2$, $y = 2at$, find $\frac{du}{dt}$.
- (4) If $z = x^3 \cos \frac{y}{x} + y^3 \sin \frac{x}{y}$, then find $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$.
- (5) Define : Differentiability of a function of two variables.
- (6) Define multiple point.
- (7) If $u = \cos xy$, then find $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.
- (8) Define Harmonic function and check whether the function $f(x, y) = x^3 y^3$ is harmonic.
- (9) Find the radius of curvature of parabola $y = 4x^2$.
- (10) Let $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ be a function defined by $f(x, y, z) = x^2 z + y^3 z^2 - xyz$, then find the value of $f_x(1, 0, 3)$.
- (11) If the double point is NODE, then what is relation between r , s and t ?
- (12) State Maclaurin's theorem for function of two variables.

Seat No. : _____

MD-202

May-2025

B.Sc., Sem.-II

MAT-103 : Mathematics

(Differential Equation and Solid Co-ordinate Geometry)

(Old)

Time : 2:30 Hours]

[Max. Marks : 70

- સૂચનાઓ : (1) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.
(2) પદો અને ચિહ્નો પ્રમાણિત છે.
(3) જમણી બાજુ આપેલા અંક કુલ ગુણ દર્શાવે છે.

1. (a) બર્નોલીનું વિકલ સમીકરણ લખો અને તેને ઉકેલવાની રીત સમજાવો. 7
(b) વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ મેળવો : $(3x^2y + 2xy)dx + (x^3 + x^2 + 2y)dy = 0$. 7

અથવા

1. (a) લાગ્રાંજનું વિકલ સમીકરણ લખો અને તેને ઉકેલવાની રીત સમજાવો. 7
(b) વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ મેળવો : $x^2p^2 - 2xyp + 2y^2 - x^2 = 0$, જ્યાં $p = \frac{dy}{dx}$. 7

2. (a) સાબિત કરો : $\frac{1}{f(D^2)} \cos ax = \frac{1}{f(-a^2)} \cos ax$, જ્યાં $f(-a^2) \neq 0$. 7
(b) વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ મેળવો : $(D^2 + 9)y = \sin 3x$. 7

OR

2. (a) સાબિત કરો : $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax}$, જ્યાં $f(a) \neq 0$. 7
(b) વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ મેળવો : $(D^2 - 2D + 4)y = e^x \sin x$. 7

3. (a) સમતલ $lx + my + nz = p$ ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ સ્પર્શે તેની શરત મેળવો તથા સ્પર્શ બિંદુના ચામ મેળવો. 7
(b) સમતલ $2x - y - 2z = 4$ અને ગોલક $4(x^2 + y^2 + z^2) + 10x - 25y - 2z = 0$ ના સ્પર્શ બિંદુના ચામ મેળવો. 7

અથવા

3. (a) લંબચ્છેદી ગોલકો થવા માટેની શરત મેળવો. 7
 (b) R^3 માં વર્તુળ $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $3x + 4y - 2z = 10$ અને બિંદુ $(2, -1, 1)$ માંથી પસાર થતા ગોલકનું સમીકરણ મેળવો. 7

4. (a) શાંકવનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો. 7
 (b) ઉગમબિંદુ શિરોબિંદુ હોય અને $x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 8$, $x + y + 5z = 4$ નિર્દેશક વક્ર હોય તેવા શંકુનું સમીકરણ મેળવો. 7

અથવા

4. (a) $C(\rho, \alpha)$ કેન્દ્ર અને a વાળા વર્તુળનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો. 7
 (b) સર્જક રેખાઓ $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ ને સમાંતર હોય નિર્દેશક વક્ર ઉપવલય $x^2 + 2y^2 =$, $z = 0$ હોય તેવા નળાકારનું સમીકરણ મેળવો. 7

5. કોઈપણ સાતના ઉત્તર આપો : 14

- (1) વિકલ સમીકરણ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = x^2e^{3x}$ ની કક્ષા અને પરિમાણ મેળવો.
 (2) વિકલ સમીકરણ $yp = xp^2 + a$, જ્યાં $p = \frac{dy}{dx}$, a અચળનો વ્યાપક ઉકેલ મેળવો.
 (3) સાદું રૂપ આપો : $\frac{1}{1-D} x^4$.
 (4) $y = A e^{-3x} + B e^{4x}$, જ્યાં A, B અચળાંકો છે ઉકેલ હોય તેવું વિકલ સમીકરણ જણાવો.
 (5) કાર્તેઝીય સમીકરણ મેળવો : $r = \sin \theta$
 (6) ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 4z - 4 = 0$ નાં $(1, 0, -1)$ બિંદુએ સ્પર્શતલનું સમીકરણ મેળવો.
 (7) લંબચ્છેદી ગોલકો વ્યાખ્યાયિત કરો.
 (8) સંકલ્પકારક અવયવ વ્યાખ્યાયિત કરો.
 (9) દ્વિવપ્રુષ્ઠ અતિવલય સમતલને સ્પર્શે તેની શરત જણાવો.
 (10) R^3 માં શંકુ વ્યાખ્યાયિત કરો.
 (11) ધ્રુવીય સમીકરણ $r \sin \theta = 12 - 3r$ વડે દર્શાવાતો વક્ર જણાવો.
 (12) કેન્દ્ર $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ અને ત્રિજ્યા 7 હોય તેવા વર્તુળનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો.

Seat No. : _____

MD-202

May-2025

B.Sc., Sem.-II

MAT-103 : Mathematics

(Differential Equation and Solid Co-ordinate Geometry)

(Old)

Time : 2:30 Hours]

[Max. Marks : 70

- Instructions :** (1) All the questions are compulsory.
(2) Notations and terminologies are standard.
(3) Figure to the right indicates the full marks.

1. (a) Write the Bernoulli's differential equation and explain the method of solving it. 7
(b) Solve differential equation : $(3x^2y + 2xy)dx + (x^3 + x^2 + 2y)dy = 0$. 7

OR

1. (a) Write the Lagrange's differential equation and explain the method of solving it. 7
(b) Solve : $x^2p^2 - 2xyp + 2y^2 - x^2 = 0$, where $p = \frac{dy}{dx}$. 7

2. (a) Prove that : $\frac{1}{f(D^2)} \cos ax = \frac{1}{f(-a^2)} \cos ax$, if $f(-a^2) \neq 0$. 7
(b) Solve differential equation : $(D^2 + 9)y = \sin 3x$. 7

OR

2. (a) Prove that : $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax}$, where $f(a) \neq 0$. 7
(b) Solve differential equation : $(D^2 - 2D + 4)y = e^x \sin x$. 7

3. (a) Find the condition that the plane $lx + my + nz = p$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ and find the point of contact. 7
(b) Find the point of contact to the tangent plane $2x - y - 2z = 4$ and the sphere $4(x^2 + y^2 + z^2) + 10x - 25y - 2z = 0$. 7

OR

3. (a) Derive the orthogonality condition between two spheres. 7
 (b) Find equation of a sphere passing through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $3x + 4y - 2z = 10$ and a point $(2, -1, 1)$ in R^3 . 7

4. (a) Obtain the polar equation of conic. 7
 (b) Obtain the equation of cone whose vertex is origin and guiding curve is $x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 8$, $x + y + 5z = 4$. 7

OR

4. (a) Obtain the polar equation of circle having centre $C(\rho, \alpha)$ and radius a . 7
 (b) Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ and whose guiding curve the ellipse $x^2 + 2y^2 = 1$, $z = 0$. 7

5. Attempt any **seven** : 14

- (1) Find order and degree of the differential equation $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = x^2e^{3x}$.
- (2) Find the general solution of the differential equation $yp = xp^2 + a$, where $p = \frac{dy}{dx}$, a is constant.
- (3) Simplify : $\frac{1}{1+D} x^4$.
- (4) Find the differential equation whose general solution is $y = A e^{-3x} + B e^{4x}$, where A, B are constants.
- (5) Find the Cartesian equation of $r = \sin \theta$.
- (6) Find the equation of tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 4z - 4 = 0$ at point $(1, 0, -1)$.
- (7) Define : Orthogonal spheres.
- (8) Define : Integrating factor.
- (9) Write a condition for which hyperboloid of two sheets touches the plane.
- (10) Define : Cylinder in R^3 .
- (11) Which curve is represented by the polar equation $r \sin \theta = 12 - 3r$?
- (12) Obtain the polar equation of circle having centre $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ and radius 7.