Seat No. : ______________

FE-125

February-2025

B.Sc., Sem.-I (NEP-2020)

DSC-C-MAT - 111T : Mathematics

(Calculus-I)

Time : 2:00 Hours] **[Max. Marks : 50**

સૂચનાઓ : (1) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ **પાંચ** પ્રશ્નો છે.

(2) પાંચમો પ્રશ્ન હેતુલક્ષી છે.

(3) **બધા જ** પ્રશ્નોના ગુણ સરખા છે.

1. (A) જો $y = e^{ax}\sin(bx + c)$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, c-અચળ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તો સાબિત કરો કે $y_n = r^n e^{ax}\sin(bx + c + n\phi)$ જ્યાં $a = r\cos\phi$, $b = r\sin\phi$. **5**

(B) જો $y = (x+\sqrt{x^2+1})^m$; હોય તો સાબિત કરો કે **5**
$(1 + x^2)y_{n+2} + 2(n + l)xy_{n+1} - m^2y_n = 0$.

અથવા

1. (A) મેકલોરીનના પ્રમેયની મદદથી $\log(1 + x)$ નું xના ઘાતમાં વિસ્તરણ મેળવો. **5**

(B) $(x - 1)$ના ઘાતમાં $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ની ઘાત શ્રેઢી મેળવો, જ્યાં $0 < x < 2$. આ પરથી $\sqrt{2}$ ની ઘાત શ્રેઢીના પ્રથમ પાંચ પદો મેળવો. **5**

2. (A) બર્નોલીનું વિકલ સમીકરણ લખો અને તેના ઉકેલની રીત સમજાવો. **5**

(B) સમીકરણ ઉકેલો : $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} + y = \tan^{-1} x$. **5**

અથવા

2. (A) લાગ્રાજનું વિકલ સમીકરણ લખો અને તેના ઉકેલની રીત સમજાવો. **5**

(B) સમીકરણ ઉકેલો : $y = 2p + 3p^2$, જ્યાં $p = \dfrac{dy}{dx}$. **5**

3. (A) કોશીનું મધ્યકમાન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **5**

(B) $x > 0$ માટે સાબિત કરો કે $\dfrac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x$. **5**

અથવા

3. (A) લા'પીટલનો પ્રથમ નિયમ લખો અને $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{x}{1-x}\right]$; $x \in R^+ - \{1\}$ લક્ષ મેળવો. **5**

(B) જો $3a - 4b + 6c - 12d = 0$ હોય તો સાબિત કરો કે ત્રિઘાત સમીકરણ, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$નું એક બીજ -1 અને 0 વચ્ચે આવેલ છે. **5**

4. (A) જો વિધેય $\phi(x)$ એ 'a' બિંદુ આગળ સતત હોય અને $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = l \in R$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\lim_{x \to a} f(x, \phi(x))$ અસ્તિત્વ ધરાવે અને તે lની બરાબર છે. જ્યાં $\phi(a) = b$. **5**

(B) વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી $\lim_{(x, y) \to (1, 2)} (xy)$ કિંમત મેળવો. **5**

અથવા

4. (A) વ્યાખ્યા આપો : વિધેયનું સાતત્ય વિધેય **5**

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & , \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , \quad x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$ નું બિંદુ (0, 0) આગળ સાતત્ય ચર્ચો.

(B) જો ϕ એ અદિશ વિધેય અને f એ સદિશ વિધેય હોય તો બતાવો કે

$\text{div.} (\phi, f) = \phi \text{ div. } f + f \cdot (\text{grad } \phi)$. **5**

5. ટૂંકમાં જવાબ આપો : (ગમે તે **દસ**) **10**

(1) જો $y = \dfrac{1}{\sec(2x + 1)}$ હોય તો y_n મેળવો.

(2) વિધેય $\cos x$; $x \in R$ નું x ના પદમાં વિસ્તરણ લખો.

(3) લાયબ્નીઝ પ્રમેય લખો.

(4) વિકલ સમીકરણ $\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{2}{3}} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ ની કક્ષા અને પરિમાણ લખો.

(5) વિકલ સમીકરણ $\cos^{-1} (y - xp) = p^2 + p$નો સામાન્ય ઉકેલ મેળવો.

(6) વિકલ સમીકરણ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ યથાર્થ હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત લખો.

(7) વિધેય $f(x) = |x - 2|$, $x \in [1, 3]$ માટે રોલનું મધ્યકમાન પ્રમેય પ્રયોજી શકાય કે કેમ ?

(8) બતાવો કે $f(x) = x^3 + 5$, $x \in R$ માટે ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

(9) લક્ષ મેળવો : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x}$.

(10) જો $f(x, y) = x^2 + y^2$ હોય તો $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ અને $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ મેળવો.

(11) વ્યાખ્યા આપો : $\bar{f}$ નું કર્લ.

(12) ગણ $S \subset R^n$ ના લક્ષબિંદુની વ્યાખ્યા આપો.

Seat No. : _______________

FE-125

February-2025

B.Sc., Sem.-I (NEP-2020)

DSC-C-MAT - 111T : Mathematics

(Calculus-I)

Time : 2:00 Hours] **[Max. Marks : 50**

Instructions : (1) There are total **five** questions in this question paper.
(2) **Fifth** question is objective.
(3) **All** questions carry equal marks.

1. (A) If $y = e^{ax} \sin(bx + c)$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, c are constant real numbers, then prove that $y_n = r^n e^{ax} \sin(bx + c + n\phi)$, where $a = r \cos \phi$, $b = r \sin \phi$. **5**

(B) If $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^m$; then prove that **5**
$(1 + x^2)y_{n+2} + 2(n + 1)xy_{n+1} - m^2y_n = 0$.

OR

1. (A) Using Maclaurin's theorem, obtain an expansion of $\log(1 + x)$ in the powers of x. **5**

(B) Obtain the power series of $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ in terms of $(x - 1)$; $0 < x < 2$. Using this, derive power series of $\sqrt{2}$ upto five terms. **5**

2. (A) Write the Bernoulli's differential equation and explain the method to solve it. **5**

(B) Solve the equation : $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} + y = \tan^{-1} x$. **5**

OR

2. (A) Write the Lagrange's differential equation and explain the method of its solution. **5**

(B) Solve the equation : $y = 2p + 3p^2$, where $p = \dfrac{dy}{dx}$. **5**

3. (A) State and prove Cauchy's mean value theorem. **5**

(B) For $x > 0$, prove that $\dfrac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x$. **5**

OR

3. (A) State L'Hospital's first rule and evaluate. **5**

$$\lim_{x \to 1}\left[\frac{1}{\log x} - \frac{x}{1-x}\right]; x \in R^+ - \{1\}$$

(B) If $3a - 4b + 6c - 12d = 0$, then show that one root of cubic equation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ lies between -1 and 0. **5**

4. (A) If the function $\phi(x)$ is continuous at point 'a' and $\lim\limits_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = l \in R$, then prove that $\lim\limits_{x \to a} f(x, \phi(x))$ exists and is equal to l. where $\phi(a) = b$. **5**

(B) Using definition evaluate : $\lim\limits_{(x, y) \to (1, 2)} (xy)$. **5**

OR

4. (A) Define : Continuity of a function. Discuss the continuity of function **5**

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & , \ x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , \ x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \text{ at point } (0, 0).$$

(B) If ϕ is a scalar function and f is a vector function, then div. $(\phi, f) = \phi$ div. $f + f \cdot (\text{grad } \phi)$. **5**

5. Give answer in short : (Any **Ten**) **10**

(1) If $y = \dfrac{1}{\sec(2x+1)}$, then find y_n.

(2) Write the expansion for $\cos x$; $x \in R$ in terms of x.

(3) State Leibnitz's theorem.

(4) Write the order and degree of the differential equation :

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{2}{3}} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

(5) Write a general solution of a differential equation $\cos^{-1}(y - xp) = p^2 + p$.

(6) Write the necessary and sufficient condition for the differential equation $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ is to be exact.

(7) Can we apply Rolle's mean value theorem for function $f(x) = |x - 2|, x \in [1, 3]$?

(8) Show that the function $f(x) = x^3 + 5$ is strictly increasing for $x \in R$.

(9) Evaluate limit : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x}$.

(10) If $f(x, y) = x^2 + y^2$, then find $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ and $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(11) Define : curl of $\bar{f}$.

(12) Define limit point of a set $S \subset R^n$.