Seat No. : _______________

AK-101

April-2023

B.Sc., Sem.-IV

205 : Mathematics
(Abstract Algebra-I)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચનાઓ : (1) સાર્વત્રિક સંકેતો પ્રચલિત છે.
(2) બધા પ્રશ્નો ફરજીયાત છે.
(3) જમણી તરફના આંકડાઓ ગુણભાર દર્શાવે છે.

1. (A) ધારો કે, $\sim$ ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સામ્ય સંબંધ છે. ધારો કે $cl(a)$ એ $a \in A$નો સામ્ય વર્ગ છે. સાબિત કરો કે, આપેલ $a, b \in A$ માટે, **7**
(i) $a \sim b \Leftrightarrow cl(a) = cl(b)$
(ii) $cl(a) \neq cl(b) \Rightarrow cl(a) \cap cl(b) = \phi$

(B) ધારો કે $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \text{ and } a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$. સાબિત કરો કે, G શ્રેણીકોના ગુણાકાર હેઠળ સમક્રમી સમૂહ છે. **7**

અથવા

(A) ધારો કે, $*$ શાંત ગણ G પર દ્વિક-ક્રિયા છે. ધારો કે, $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે. તેમજ $*$ માટે ડાબી તેમજ જમણી બાજુના લોપના નિયમોનું પાલન થાય છે. સાબિત કરો કે, $(G, *)$ સમૂહ છે. **7**

(B) ધારો કે, a એ $o(a) = n$ હોય તેવો સમૂહ Gનો ઘટક છે. સાબિત કરો કે, **7**
(i) $o(a^p) \leq o(a)$, જ્યાં $p \in Z$
(ii) $o(a^{-1}) = o(a)$
(iii) આપેલ $q \in N$ માટે, $(q, n) = 1$ હોય તો $o(a^q) = o(a)$

2. (A) શાંત સમૂહ Gના ઉપ-સમૂહ H માટે લાગ્રાન્જના પ્રમેયનું વિધાન લખો અને સાબિત કરો. **7**

(B) સમૂહ Gના ઘટક $a \in G$ માટે નિયતાકાર N(a)ની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે, $a \in G$નો નિયતાકાર N(a) એ Gનો ઉપ-સમૂહ છે. **7**

અથવા

(A) સાબિત કરો : **7**
(i) જો $x \in G$ અને H, સમૂહ Gનો ઉપ-સમૂહ હોય તો, $x^{-1}Hx = \{x^{-1}hx \mid h \in H\}$ સમૂહ G નો ઉપ-સમૂહ છે.
(ii) આપેલ સમૂહ Gના કોઈપણ બે ઉપ-સમૂહોનો છેદગણ પણ Gનો ઉપ સમૂહ છે.

(B) ચક્રીય સમૂહની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે, અવિભાજ્ય કક્ષાનું સમૂહ હંમેશા ચક્રીય સમૂહ છે. **7**

3. (A) ક્રમચયની વ્યાખ્યા આપો. ગણ $S = \{1, 2, 3\}$ પરના બધા ક્રમચયોની યાદી આપો અને S_3નું સમૂહ કોષ્ટક તૈયાર કરો. **7**

(B) જો K એ Gનો ઉપ-સમૂહ અને H એ Gનો નિયત ઉપ-સમૂહ હોય તો સાબિત કરો : **7**

(i) $K \cap H$ એ Kનો નિયત ઉપ-સમૂહ છે.

(ii) KH એ Gનો ઉપ-સમૂહ છે.

અથવા

(A) આપેલ $f = (1\ 3\ 4\ 5\ 6\ 2)$, $g = (1\ 2\ 4\ 3)(5\ 6) \in S_6$ માટે, **7**

fog^2 મેળવો તથા $o(f)$ અને $o(g)$ મેળવો.

(B) સાબિત કરો કે, સમૂહ Gનો ઉપ-સમૂહ H નિયત હોય તો અને તો જ દરેક $a \in G$ માટે $aHa^{-1} \subset H$ હોય. **7**

4. (A) સાબિત કરો કે, સમાન કક્ષાના કોઈપણ બે શાંત ચક્રીય સમૂહો એકરૂપ હોય છે. **7**

(B) ધારો કે, $G = <a>$, n કક્ષાનું શાંત ચક્રીય સમૂહ છે. સાબિત કરો કે, આપેલ $1 \leq s < n$ માટે, જો $(n, s) = 1$ તો અને તો જ $a^s \in G$ એ Gનો સર્જક હોય. **7**

અથવા

(A) સાબિત કરો કે, સમૂહ સમરૂપતા $\phi : (G; o) \rightarrow (G'; *)$નો ગર્ભ K_ϕ, સમૂહ Gનો નિયત ઉપ-સમૂહ છે. **7**

(B) ધારો કે, H એ સમૂહ Gનો નિયત ઉપ-સમૂહ છે અને $\phi : (G; o) \rightarrow (G'; *)$ સમૂહ સમરૂપતા છે. સાબિત કરો કે $\phi(H)$ સમૂહ $\phi(G)$નો નિયત ઉપ-સમૂહ છે. **7**

5. કોઈપણ **સાત**ના જવાબ લખો : **14**

(1) n ઘાતનો સમમિત સમૂહ S_n અને એકાંતર સમૂહ A_nની વ્યાખ્યા આપો.

(2) ધારો કે, G સમક્રમી સમૂહ છે. આપેલ $a, b \in G$ માટે $o(a) = 3$ અને $o(b) = 5$ છે, તો $o(ab)$ શું થશે ? તમારા જવાબના સમર્થન આપો.

(3) સમૂહના કેન્દ્રની વ્યાખ્યા આપો. સમૂહ $(\mathbb{Z}, +)$નું કેન્દ્ર શોધો.

(4) ઓઈલરના પ્રમેયનું વિધાન લખો.

(5) નીચેના ક્રમચયો પૈકી આપેલ ક્રમચય યુગ્મ છે કે અયુગ્મ તે નક્કી કરો :

(i) $f = (1\ 2\ 3)(4\ 5)(6\ 7\ 8) \in S_8$.

(ii) $g = (1\ 7\ 3\ 13)(2\ 10\ 9)(6\ 12)(8\ 15) \in S_{15}$.

(6) કેલીના પ્રમેયનું વિધાન લખો.

(7) સાબિત કરો કે, ચક્રીય સમૂહ સમક્રમી છે.

(8) સમૂહ $(\mathbb{Z}_{17}, +_{17})$ના બધા સર્જકો શોધો.

(9) સમૂહ $(\mathbb{Z}; +)$ થી સમૂહ $(\mathbb{Z}_2; +_2)$પરની બધી સમરૂપતાઓ શોધો.

(10) આંતરિક આત્મરૂપતાની વ્યાખ્યા આપો.

(11) જો $G = <a>$ 12 કક્ષાનું ચક્રીય સમૂહ હોય તો Gના બધા ઉપ-સમૂહો શોધો.

(12) તમારા જવાબના સમર્થન સાથે આપેલ વિધાન સત્ય છે કે નહીં તે જણાવો :

"આપેલ દરેક $n \in N$ માટે, A_n એ S_nનો નિયત ઉપ-સમૂહ છે."

Seat No. : _______________

AK-101

April-2023

B.Sc., Sem.-IV

205 : Mathematics
(Abstract Algebra-I)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) Notations and terminologies are standard.
(2) **All** the questions are compulsory.
(3) Figures on the right-hand side indicates the marks.

1. (A) Let ~ be an equivalence relation in a set A and suppose $cl(a)$ is the equivalence class for $a \in A$. Then prove that for $a, b \in A$, **7**
   (i) $a \sim b \Leftrightarrow cl(a) = cl(b)$
   (ii) $cl(a) \neq cl(b) \Rightarrow cl(a) \cap cl(b) = \phi$

   (B) Let $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in R \text{ and } a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$. Show that G is a commutative group under matrix multiplication. **7**

OR

   (A) Let $*$ be a binary operation on a finite set G. If $*$ is associative and both right and left cancellation laws hold for $*$ in G then prove that $(G, *)$ is a group. **7**

   (B) Let $a \in G$ be an element with $o(a) = n$. Then prove that **7**
   (i) $o(a^p) \leq o(a)$, where $p \in Z$
   (ii) $o(a^{-1}) = o(a)$
   (iii) If $(q, n) = 1$ then $o(a^q) = o(a)$, for $q \in N$.

2. (A) State and prove the Lagrange's theorem for a subgroup H of a finite group G. **7**

   (B) Define normalizer N(a) for $a \in G$. Prove that N(a) is a subgroup of G. **7**

OR

   (A) Prove that : **7**
   (i) $x^{-1}Hx = \{x^{-1}hx \mid h \in H\}$ is a subgroup of a group G, if $x \in G$ and H is a subgroup of G.
   (ii) Intersection of any two subgroups of a group G is also a subgroup of G.

   (B) Define a cyclic group. Prove that a group of prime order is cyclic. **7**

3. (A) Define a permutation. List all the permutations on S = {1, 2, 3} and prepare the group table for S_3. **7**

(B) If K is a subgroup of G and H is a normal subgroup of G, then prove that **7**

(i) $K \cap H$ is a normal subgroup of K.

(ii) KH is a subgroup of G.

OR

(A) Let f = (1 3 4 5 6 2), g = (1 2 4 3)(5 6) $\in S_6$. **7**

Obtain fog^2. Also find o(f) and o(g).

(B) Prove that a subgroup H of a group G is normal if and only if $aHa^{-1} \subset H$ for each $a \in G$. **7**

4. (A) Prove that any two finite cyclic groups of the same order are isomorphic. **7**

(B) Let G = <a> be a finite cyclic group of order n. Prove that for $1 \leq s < n$, the element $a^s \in G$ is a generator of G if and only if (n, s) = 1. **7**

OR

(A) Prove that the kernel K_ϕ of a group homomorphism $\phi : (G; o) \to (G'; *)$ is a normal subgroup of group G. **7**

(B) Let H be a normal subgroup of a group G and $\phi : (G; o) \to (G'; *)$ be a group homomorphism, then prove that $\phi(H)$ is a normal subgroup of $\phi(G)$. **7**

5. Attempt any **seven** : **14**

(1) Define a symmetric group S_n and an alternative group A_n.

(2) Let G be a commutative group. Let a, b $\in$ G such that o(a) = 3 and o(b) = 5. What is o(ab) ? Justify your answer.

(3) Define center of a group. Find the center of $(\mathbb{Z}, +)$.

(4) State the Euler's theorem.

(5) Examine whether the following permutations are even or odd :

(i) f = (1 2 3)(4 5)(6 7 8) $\in S_8$.

(ii) g = (1 7 3 13)(2 10 9)(6 12)(8 15) $\in S_{15}$.

(6) State the Cayley's theorem.

(7) Prove that a cyclic group is commutative.

(8) Obtain all generators of a group $(\mathbb{Z}_{17}, +_{17})$.

(9) Find all homomorphisms from group $(\mathbb{Z}; +)$ to $(\mathbb{Z}_2; +_2)$

(10) Define inner automorphism.

(11) If G = <a> is a cyclic group of order 12 then find all subgroups of G.

(12) State true or false with justification : "A_n is normal subgroup of S_n, for each $n \in N$."