Seat No. : _______________

AJ-101

April-2023

B.Sc., Sem.-IV

204 : Mathematics

(Advance Calculus-II)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચનાઓ : (1) બધા જ પ્રશ્નો ફરજીયાત છે.

(2) તમારી ઉત્તરવહીમાં પ્રશ્નપત્રમાં દર્શાવ્યા મુજબના પ્રશ્નના નંબર લખો.

(3) જમણી બાજુમાં દર્શાવેલી સંખ્યા પ્રત્યેક પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

1. (A) જો વિધેય f એ $S = [a, b] \times [c, d]$ પર સતત હોય તો સાબિત કરો કે

$$\iint_S f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx.$$ **7**

(B) સંકલ $\int_0^3 \int_{\sqrt{9-y^2}}^{y+6} f(x, y)dydx$નો ક્રમ બદલો. **7**

અથવા

(A) $S \subset R^2$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય $f : S \to R$ સતત હોય તથા વક્રો $x = a$, $x = b$, $y = \phi(x)$ અને $y = \psi(x)$ વડે સીમીત હોય; જ્યાં ϕ અને ψ એ અંતરાલ $[a, b]$ પર સતત હોય અને $\psi(x) < \phi(x)$, $\forall x \in [a, b]$ તો સાબિત કરો કે $\iint_S f dxdy = \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f dx \right) dy.$ **7**

(B) વક્રો $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $x + y + z = 1$ વડે સીમિત પ્રદેશ V પર સંકલ $\iiint \frac{dxdydz}{(x + y + z + 1)^3}$ નું મૂલ્ય શોધો. **7**

2. (A) ડુપ્લિકેશનનું સૂત્ર લખો અને સાબિત કરો. **7**

(B) સંકલ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{8}{3}} x \sec^{\frac{1}{2}} x dx$ ની કિંમત શોધો. **7**

અથવા

(A) સાબિત કરો કે : **7**

(i) Curl (Gradϕ) = (0, 0, 0)

(ii) Div (Gradϕ) = $\nabla^2\phi$.

(B) જો $R = (x, y, z)$; $r = |R|$ હોય તો સાબિત કરો કે $\nabla^2 r^m = m(m+1)r^{m-2}$. **7**

3. (A) ગ્રીનનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

(B) સંકલ $\int (x dy + y dx)$ ની કિંમત વક્ર $y = x^2$ અને બિંદુઓ (0, 0) થી (1, 1) વચ્ચે રચાતા પ્રદેશ પર શોધો. **7**

અથવા

(A) ગૌસનું ડાયવર્જન્સ પ્રમેય $\iint_S (f \cdot n) ds$ માટે ચકાસો; જ્યાં વિધેય $f = (x, y, z)$ અને S એ ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = 1$નું પૃષ્ઠ છે. **7**

(B) સંકલ $\iint_S (f \cdot n) ds$નો ઉકેલ શોધો, જ્યાં વિધેય $f = (z, x, -3y^2 z)$ અને S એ નળાકાર $x^2 + y^2 = 10$ તથા $z = 0$ અને $z = 5$ વચ્ચે સમાયેલ આષ્ટાંકનું પૃષ્ઠ છે. **7**

4. (A) આંશિક વિકલ સમીકરણના ઉકેલ શોધવાની લાંગ્રાંજની પદ્ધતિ વર્ણવો. **7**

(B) આંશિક વિકલ સમીકરણો શોધો : **7**

(i) $F(x - \sqrt{z}, x + y) = 0$

(ii) $z = ax^2 + by^2$

અથવા

(A) સાબિત કરો કે $z = ax + y/a + b$ એ આંશિક વિકલ સમીકરણ $pq = 1$નું પૂર્ણ સંકલ છે અને sub – family $b = a$ ને અનુરૂપ વિશિષ્ટ સંકલ શોધો તથા તેનો અસામાન્ય ઉકેલ મેળવો; જ્યાં $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ અને $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. **7**

(B) આંશિક વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ શોધો : **7**

$y(x + z)p + (z^2 - 2xz - x^2)q = y(x - z)$, જ્યાં $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ અને $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

5. કોઈપણ **સાત** પ્રશ્નોનાં ટૂંકમાં જવાબ આપો : **14**

(i) સંકલ $\int_0^1 \int_0^2 (x + y)dxdy$નો ઉકેલ શોધો.

(ii) $\iint_S f(x, y)dxdy$નું ધ્રુવીય યામોમાં રૂપાંતરણ લખો.

(iii) સંકલ $\iint xydxdy$નો ઉકેલ પ્રદેશ $[0,1] \times [x^2, \sqrt{x}]$ પર શોધો.

(iv) $\Gamma 7 \times \Gamma (1/2)$ની કિંમત શોધો.

(v) જો $R = (x, y, z)$ હોય તો div(R) શોધો.

(vi) જો $\phi = x + y + z$ હોય તો $|\text{grad}\phi|$ની કિંમત શોધો.

(vii) સ્ટોકના પ્રમેયનું વિધાન લખો.

(viii) સંકલ $\int (x\, dy - y\, dx)$નું સુરેખા $y = x$ પર બિન્દુઓ $(0, 0)$ થી $(1, 1)$ વચ્ચે મૂલ્ય શોધો.

(ix) ગ્રીન પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી પ્રદેશ Rનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(x) $z = ax + by$; જ્યાં a અને b અચળાંકનું આંશિક વિકલ સમીકરણ શોધો.

(xi) આંશિક વિકલ સમીકરણ $x^2p + 2yq - x + y = 0$ની કક્ષા અને ઘાત લખો.

(xii) શું આંશિક વિકલ સમીકરણ $p - q$ સુરેખ છે ? (હા / ના)

Seat No. : _______________

AJ-101

April-2023

B.Sc., Sem.-IV

204 : Mathematics

(Advance Calculus-II)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) **All** questions are compulsory.

(2) Write the question number in your answer sheet as shown in the question paper.

(3) Figures to the right indicate marks of the question.

1. (A) If f is a continuous function on S = [a, b] × [c, d] then prove that

$$\iint_S f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx.$$ **7**

(B) Change the order of integration in the integral $\int_0^3 \int_{\sqrt{9-y^2}}^{y+6} f(x, y)dydx$. **7**

OR

(A) Let the function f : S → R be continuous on $S \subset R^2$ which is bounded by curves $x = a$, $x = b$, $y = \phi(x)$ and $y = \psi(x)$, where ϕ and ψ are continuous functions on [a, b] such that $\psi(x) < \phi(x)$, $\forall x \in [a, b]$ then prove that

$$\iint_S f dxdy = \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f dx \right) dy.$$ **7**

(B) Evaluate $\iiint \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$ over the region V bounded by curves $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $x + y + z = 1$. **7**

2. (A) State and prove Duplication formula. **7**

(B) Evaluate $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{8}{3}} x \sec^{\frac{1}{2}} x dx$. **7**

OR

(A) Prove that : **7**

(i) Curl (Gradϕ) = (0, 0, 0)

(ii) Div (Gradϕ) = $\nabla^2\phi$.

(B) If R = (x, y, z); r = | R | then prove that $\nabla^2 r^m = m(m + 1)r^{m-2}$. **7**

3. (A) State and prove Green's Theorem. **7**

(B) Evaluate $\int (x dy + y dx)$ over the region by curve $y = x^2$ and from points (0, 0) to (1, 1). **7**

OR

(A) Verify Divergence theorem of Gauss for $\iint_S (f \cdot n) ds$; where f = (x, y, z) and S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. **7**

(B) Evaluate $\iint_S (f \cdot n) ds$; where $f = (z, x, -3y^2 z)$ and S is the surface of the cylinder $x^2 + y^2 = 10$, included in the first octant between z = 0 and z = 5. **7**

4. (A) Derive Lagrange's method to solve partial differential equation. **7**

(B) Form the partial differential equation of **7**

(i) $F(x - \sqrt{z}, x + y) = 0$

(ii) $z = ax^2 + by^2$

OR

(A) Show that $z = ax + y/a + b$ is a complete integral of partial differential equation $pq = 1$ and find the particular integral corresponding to the sub-family $b = a$, also determine its singular solution; where $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ and $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$. **7**

(B) Find the General Solution of the partial differential equation. **7**

$$y(x + z)p + (z^2 - 2xz - x^2)q = y(x - z), \text{ where } p = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ and } q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

5. Give the answer in brief. (Any **Seven**). **14**

(i) Evaluate $\int_0^1 \int_0^2 (x + y)dxdy$.

(ii) Write the transformation of $\iint_S f(x, y)dxdy$ into polar coordinates.

(iii) Evaluate $\iint xydxdy$ over the region $[0,1] \times [x^2, \sqrt{x}]$.

(iv) Find the value of $\Gamma\, 7 \times \Gamma\,(1/2)$.

(v) If $R = (x, y, z)$ then find div(R).

(vi) If $\phi = x + y + z$ then obtain the value of $|\text{grad}\phi|$.

(vii) Write the statement of Stoke's theorem.

(viii) Evaluate $\int (x \, dy - y \, dx)$ along the path $y = x$ from point (0, 0) to point (1, 1).

(ix) Obtain the area of the region R by Green's theorem.

(x) Find the partial differential equation of $z = ax + by$; where a and b are the parameters.

(xi) Find the order and degree of the partial differential equation $x^2p + 2yq - x + y = 0$.

(xii) Whether the partial differential equation $p - q$ is linear ? (Yes / No)
