Seat No. : _______________

MM-119

March-2019

B.Sc., Sem.-VI

307 : Physics

(Mathematical Physics, Classical Mechanics & Quantum Mechanics)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) બધા જ પ્રશ્નોના જવાબ આપો.
(2) સંજ્ઞાઓના અર્થ પ્રચલિત પ્રણાલિકા મુજબ છે.

1. (A) નીચેના પ્રશ્નો લખો :

(1) જો v પૂર્ણાંક ન હોય તો દર્શાવો કે $W[J_v(x), J_{-v}(x)] = \frac{-2 \sin \pi v}{\pi x}$. **7**

(2) બેસલ વિધેયો નીચેના લંબ છેદકીય (Orthogonality) સંબંધ સંતોષે છે તેમ સાબિત કરો : **7**

$$\int_0^a J_v\left(\alpha_{vm}\frac{\rho}{a}\right) J_v\left(\alpha_{vn}\frac{\rho}{a}\right) \rho d\rho = 0,\ m \neq n \text{ અને}$$

$$\int_0^a J_v\left(\alpha_{vm}\frac{\rho}{a}\right) J_v\left(\alpha_{vn}\frac{\rho}{a}\right) \rho d\rho = \frac{a^2}{2}[J_v'(\alpha_{vn})]^2\ m = n$$

અથવા

(1) સાબિત કરો કે :

(i) $x J_n' = n J_n - x J_{n+1}$

(ii) $x J_n' = x J_{n-1} - n J_n$

(2) દર્શાવો કે $J_{n+3} + J_{n+5} = \frac{2}{x}(n+4) J_{n+4}$

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો : (છમાંથી કોઈપણ **ચાર**) **4**

(1) $J_n(x)$ નું સર્જક વિધેય લખો.

(2) $f(x) = x^3$ ને લીજેન્ડ્ર બહુપદીમાં દર્શાવો.

(3) લીજેન્ડ્રનું વિકલ સમીકરણ લખો.

(4) ન્યૂમેન વિધેય વ્યાખ્યાયિત કરો.

(5) બેસલનું વિકલ સમીકરણ લખો.

(6) લીજેન્ડ્ર બહુપદી $P_4(x)$ નું મૂલ્ય લખો.

2. (A) નીચેના પ્રશ્નો લખો :

(1) δ સંકેત નો ઉપયોગ કરીને ઓઈલર-લાંગ્રાન્જના ગતિના સમીકરણ મેળવો. **7**

(2) વિદ્યુતયાંત્રિક સરખામણીને આધારે L–C–R શ્રેણી પરિપથ અને L–C–R સમાંતર પરિપથ માટેનાં લાંગ્રાન્જીયન મેળવો. **7**

અથવા

(1) જીઓડેસીક સમજાવો. ગોલીય સપાટીના જીઓડેસીસ ગુરૂ વર્તુળો છે તેમ દર્શાવો.

(2) ગતિશીલ આધાર સાથે સરળ આવર્તક દોલકના તંત્ર માટેના હેમિલ્ટોનીયન મેળવો.

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો : (છમાંથી કોઈપણ **ચાર**) **4**

(1) હેમિલ્ટોનિયનનો સિદ્ધાંત લખો.

(2) પ્રવસ્થા અવકોટા એટલે શું ?

(3) એક પારિમાણિક સરળ આવર્તક દોલકના પ્રવસ્થા માર્ગના ઢાળનું મૂલ્ય લખો.

(4) જો L સમય પર આધારિત ન હોય તો $\frac{dH}{dt}$ = ________.

(5) ઓઈલર-લાગ્રાન્જીયન સમીકરણ લખો.

(6) સાદું લોલક એટલે શું ?

3. (A) નીચેના પ્રશ્નો લખો :

(1) ત્રિ-પરિમાણિક સ્થિતિમાન કૂપના અંદરના ભાગમાં શ્રોડીન્જર સમીકરણનો ઉકેલ શોધો. **7**

(2) $\rho \frac{d^2L}{d\rho^2} + [2(e + 1) - \rho] \frac{dL}{d\rho} + [\tau - (l + 1)] L(\rho) = 0$ વિકલ સમીકરણથી શરૂ કરી હાઈડ્રોજન પરમાણુ માટે પ્રસામાન્યકૃત ત્રિજ્યાવર્તી તરંગ વિધેય મેળવો. **7**

સૂચના : $\int_0^\infty e^{-\rho} \cdot \rho^{p+1} [L_q^p(\rho)]^2 d\rho = \frac{(2q - p + 1)\,(9!)^3}{(q - p)!}$

અથવા

(1) ત્રિજ્યાવર્તી સમીકરણનો ઉપયોગ કરી સમદિક્‌ધર્મી દોલકના કોયડાનો ઉકેલ શોધો.

(2) સમાન ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં વિદ્યુતભારિત કણ માટેના ઊર્જા વર્ણપટ અને આઈગન વિધેયોની ચર્ચા કરો.

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો : (પાંચમાંથી કોઈપણ ત્રણ) **3**

(1) હાઈડ્રોજન પરમાણુ માટે કુલંબીય સ્થિતિમાનનું મૂલ્ય લખો.

(2) સરળ આવર્તક દોલકનું ક્વૉન્ટમ યંત્રશાસ્ત્ર મહત્વ શું છે ?

(3) ધ્રુવીય સંમિતિ પોટેન્શિયલ એટલે શું ?

(4) પાંચમી અવસ્થામાં હાઈડ્રોજન પરમાણુના ઈલેક્ટ્રોનની ઊર્જા ________ છે.

(5) હાઈડ્રોજન પરમાણુનું સંપૂર્ણ તરંગ વિધેય ψ_{210} = _______.

4. (A) નીચેના પ્રશ્નો લખો :

(1) હિલબર્ટ અવકાશ પર ટૂંકનોંધ લખો. **7**

(2) રેખીય વેગમાન, ઊર્જા અને સ્થાનની શ્રોડીન્જર નિરૂપણની ચર્ચા કરો. **7**

અથવા

(1) x, y અને z અક્ષને અનુલક્ષીને સૂક્ષ્મ ભ્રમણ સદિશ માટેના જનરેટર Σ_x, Σ_y અને Σ_z નાં મૂલ્યો

$$\Sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \Sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \Sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ મેળવો.

(2) (i) દર્શાવો કે મૂળભૂત કોમ્યુટેશન સંબંધ $[x, Px] = i\hbar$ એ એેકૈક્ય રૂપાંતરણમાં બદલાતો નથી.

(ii) જો $\hat{A}$ કોઈ સ્વય સંલગ્ન કારક હોય તો દર્શાવો કે $\frac{1 - i A}{1 + i A}$ એેકૈક્ય (unitary) છે.

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો : (પાંચમાંથી કોઈપણ ત્રણ) **3**

(1) $(AB)^+ =$ ________.

(2) $(A^+)^+ =$ ________.

(3) હર્મિશીયન કારકને વ્યાખ્યાયિત કરો.

(4) સમય રીવર્સલ એટલે શું ?

(5) શા માટે સમય રીવર્સલ કારક એ રેખીય નથી.

Seat No. : _______________

MM-119

March-2019

B.Sc., Sem.-VI

307 : Physics

(Mathematical Physics, Classical Mechanics & Quantum Mechanics)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) Attempt **all** questions.

(2) Symbols used have their usual meaning.

1. (A) Write the following questions :

(1) Show that W $[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = \frac{-2 \sin \pi\nu}{\pi x}$ if ν is not an integer. **7**

(2) Prove that Bessel function satisfy the following orthogonality relation. **7**

$$\int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right) J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\rho d\rho = 0,\ m \neq n \text{ and}$$

$$\int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right) J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\rho d\rho = \frac{a^2}{2}[J_\nu'(\alpha_{\nu n})]^2\ m = n$$

OR

(1) Prove that :

(i) $x J_n' = n J_n - x J_{n+1}$

(ii) $x J_n' = x J_{n-1} - n J_n$

(2) Show that $J_{n+3} + J_{n+5} = \frac{2}{x}(n+4) J_{n+4}$

(B) Answer in short (any **four** out of **six**) : **4**

(1) Write down the generating function for $J_n(x)$

(2) Express $f(x) = x^3$ in term of Legendre polynomials.

(3) Write down Legendre differential equation.

(4) Define Neumann function.

(5) Write down the Bessel's differential equation.

(6) Write down value of $P_4(x)$ for Legendre polynomial.

2. (A) Write the following questions :

(1) Using δ notation, obtain Euler – Lagrange's question of motion. **7**

(2) Obtain Lagrangian for series L-C-R and parallel L-C-R electric circuit on the basis of electro-mechanical analogies . **7**

OR

(1) Explain geodesic. Show that the geodesic of spherical surface are great circles.

(2) Obtain Hamilton's of system for a simple harmonic pendulum with moving support.

(B) Answer in short (any **four** out of **six**) : **4**

(1) State Hamiltonian principle.

(2) What is phase space ?

(3) Write down the value slope at the phase path in one dimension harmonic oscillator.

(4) If L is not depend on time then $\frac{dH}{dt}$ = ________.

(5) Write Euler – Lagrange's equation.

(6) What is simple pendulum ?

3. (A) Write the following questions :

(1) Find the solution of Schrodinger equation inside of a three dimensional square well potential. **7**

(2) Starting with the differential equations : **7**

$$\rho \frac{d^2L}{d\rho^2} + [2(e+1) - \rho] \frac{dL}{d\rho} + [\tau - (l+1)] L(\rho) = 0$$

Obtain the normalized radial wave function for H-atom.

$$\text{Hint : } \int_0^\infty e^{-\rho} \cdot \rho^{p+1} [L_q^p(\rho)]^2 d\rho = \frac{(2q - p + 1)(9!)^3}{(q - p)!}$$

OR

(1) Using radial equation solve the problem of isotropic oscillator.

(2) Discuss the energy spectrum and Eigen function for a charged particle in a uniform magnetic field.

(B) Answer in short (any **three** out of **five**) : **3**

(1) Write down value of Coulomb potential in H-atom.

(2) What is importance of harmonic oscillators in quantum physics ?

(3) What is spherically symmetric potential ?

(4) The energy of 5th state of electron in H-atom is _____ R_y.

(5) Write down complete wave function of H-atom ψ_{210} = _______.

4. (A) Write the following questions :

(1) Write short note on Hilbert space. **7**

(2) Explain a linear momentum, energy and position of the Schrodinger representation. **7**

OR

(1) Obtain the generator Σ_x, Σ_y and Σ_z for infinitesimal rotation of a vector about x, y and z axis respectively.

$$\Sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \Sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \Sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) (i) Show that the fundamental commutation relation $[x, Px] = i\hbar$ remain unchanged under unitary transformation.

(ii) If $\hat{A}$ is any Hermitian operator show that $\frac{1 - i A}{1 + i A}$ is unitary.

(B) Answer in short : (any **three** out of **five**) **3**

(1) $(AB)^+ =$ _______________.

(2) $(A^+)^+ =$ _______________

(3) Define Hermitian operator.

(4) What is time reversal ?

(5) Why is time reversal operator not linear ?

____