Seat No. : _______________

MU-110

March-2019

B.Sc., Sem.-IV

CC-204 : Mathematics

(Advanced Calculus-II)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

(2) ઉત્તરવહીમાં પ્રશ્નપત્રમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પ્રશ્નનો અંક લખવો.

(3) જમણી તરફનાં એક જે તે પ્રશ્નનો ગુણભાર દર્શાવે છે.

1. (A) (i) ધ્રુવીય યામ પદ્ધતિમાં રૂપાંતરીત કરીનો શોધો : $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dydx.$ **7**

(ii) સંકલનનો ક્રમ બદલો : $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\, dydx.$ **7**

અથવા

(i) શોધો : $\iint_R xy\, dxdy$, જ્યાં $R = \{(x, y)/x \geq 0, y \leq 4, x^2 \leq y\}$. **7**

(ii) યામ સમતલો અને સમતલ $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ દ્વારા ઘેરાયેલ ઘનનું ઘનફળ શોધો. **7**

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો : (કોઈપણ બે) **4**

(i) શોધો : $\int_0^1 \int_0^x x\, dydx$

(ii) $\iint_R$ f(x, y) d$x$dy ની સંકલ સીમા શોધો, જ્યાં R એ રેખાઓ y = 0, y = x, y = 2 દ્વારા ઘેરાયેલા વિસ્તાર છે.

(iii) શોધો : $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$, જ્યાં x = r cosθ, y = r sinθ.

2. (A) (i) પ્રચલિત સંકેતો મુજબ, સાબિત કરો કે $\lceil n \lceil n+\frac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \lceil 2n$. **7**

(ii) જો $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ અને $|\bar{r}| = r$ હોય તો સાબિત કરો કે $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$ કે જ્યાં f(r) એ r નું વિધેય છે. **7**

અથવા

(i) બીટા – ગામા વિધેયોનો ઉપયોગ કરીને નીચેનાની કિંમત મેળવો : **7**

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt[4]{x}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^4)^3}\, dx$

(ii) જો ϕ એ અદીશ વિધેય અને $\bar{f} = f_1\bar{i} + f_2\bar{j} + f_3\bar{k}$ એ $D \subset R^3$ ઉપર વિકલનીય સદિશ વિધેય છે, તો સાબિત કરો કે div $(\phi\bar{f}) = \phi \text{div}\bar{f} + \bar{f}.\text{grad}(\phi)$. **7**

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો : (કોઈપણ બે) **4**

(i) $\beta(m+1, n) + \beta(m, n+1) = \beta(m, n)$ સાબિત કરો.

(ii) ઓઈલરનું સૂત્ર લખો અને $\lceil \frac{1}{4} \lceil \frac{3}{4}$ મેળવો.

(iii) બિંદુ (1, 1, 1) પર Curl $(x^2\bar{i} + xyz\bar{j} - zx\bar{k})$ શોધો.

3. (A) (i) સ્ટોક્સનો પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

(ii) શોધો : $\int_c (x^2 + y^2) dx + (x + y) dy$, જ્યાં C એ શિરોબિંદુ ($\pm1, \pm1$) થી ઘેરાયેલા ચોરસની સીમા છે. **6**

અથવા

(i) ગ્રીનનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

(ii) શોધો : $\iint_S \overline{f}.\text{ndS}$, જ્યાં $\overline{f} = (x^3 - yz, -2x^2y, z)$ અને S એ $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = a$, $y = a$, $z = a$ થી ઘેરાયેલા ચોરસ પેટીનું પૃષ્ઠ છે. **6**

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો : (કોઈપણ બે) **4**

(i) રેખા $y = x^2$ ઉપર (0, 0) થી (1, 1) સુધી $\int x\,dx + y\,dy$ મેળવો.

(ii) ગાઉસના પ્રમેયનું વિધાન લખો.

(iii) પૃષ્ઠ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$નો અભિલંબ એકમ સદિશ મેળવો.

4. (A) (i) સાબિત કરો કે સુરેખ આંશિક વિકલ સમીકરણ $Pp + Qq = R$ નો વ્યાપક ઉકેલ $F(u, v) = 0$ છે. જ્યાં F એ સ્વૈચ્છિક વિધેય છે, $u(x, y, z) = c_1$ અને $v(x, y, z) = c_2$ એ સમીકરણ $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ ના સુરેખ સ્વાયત્ત ઉકેલ છે. **7**

(ii) સમીકરણ $z = F(xy) + G\left(\frac{x}{y}\right)$ માંથી વિધેય F અને G નો લોપ કરીને આંશિક વિકલ સમીકરણ મેળવો. **6**

અથવા

(i) વ્યાપક ઉકેલ મેળવો : $(y + z)p + (z + x)q = (x + y)$. **7**

(ii) સમીકરણ $x^2 + (y - a)^2 + z^2 = b^2$ માંથી a, b નો લોપ કરો અને $xp + yq = z$નું સંપૂર્ણ સંકલ મેળવો. **6**

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો : (કોઈપણ બે) **4**

(i) આંશિક વિકલ સમીકરણ $x^3Z_{xy} - px + qy = 0$ના કક્ષા અને પરીમાણ શોધો.

(ii) ઉકેલ લખો : $dx = dy = dz$

(iii) જો $x^2 + x + y - z = 0$ તો p =___ અને q = ____.

Seat No. : _______________

MU-110

March-2019

B.Sc., Sem.-IV

CC-204 : Mathematics

(Advanced Calculus-II)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) **All** questions are compulsory.

(2) Write the question number in your answer sheet as shown in the question paper.

(3) Figures to the right indicate marks of the question.

1. (A) (i) Evaluate $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy dx$ by changing into polar co-ordinates. **7**

(ii) Evaluate $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\,dy dx$ by changing the order of integration. **7**

OR

(i) Evaluate $\iint_R xy\,dx dy$, where $R = \{(x, y)/x \geq 0, y \leq 4, x^2 \leq y\}$. **7**

(ii) Find the volume of solid bounded by the co-ordinate planes and the plane $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$. **7**

(B) Give the answer in brief : (any **two**) **4**

(i) Evaluate : $\int_0^1 \int_0^x x\,dy dx$

(ii) Find the limit of $\iint\limits_{R} f(x, y)\, dx dy$, where R is bounded by $y = 0$, $y = x$, $y = 2$.

(iii) Evaluate $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$. when $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

2. (A) (i) In usual notations, prove that $\Gamma(n)\,\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}}\Gamma(2n)$. **7**

(ii) If $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ and $r = |\bar{r}|$ then prove that $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$, where $f(r)$ is a function of r. **7**

OR

(i) Evaluate the following using beta-gamma functions : **7**

(i) $\int_0^\infty \sqrt[4]{x}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx$

(ii) $\int_0^\infty \frac{x^2}{\left(1 + x^4\right)^3}\, dx$

(ii) If ϕ is a scalar function and $\bar{f} = f_1\bar{i} + f_2\bar{j} + f_3\bar{k}$ is a differentiable vector point function on $D \subset R^3$, then prove that $\operatorname{div}\left(\phi\bar{f}\right) = \phi \operatorname{div}\bar{f} + \bar{f}.\operatorname{grad}(\phi)$. **7**

(B) Give the answer in brief : (any **two**) **4**

(i) Show that $\beta(m + 1, n) + \beta(m, n + 1) = \beta(m, n)$.

(ii) Write the Euler's Formula and simplify $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$.

(iii) Find Curl $(x^2\bar{i} + xyz\bar{j} - zx\bar{k})$ at (1, 1, 1)

3. (A) (i) State and prove the Stokes's theorem. **7**

(ii) Evaluate $\int_{c} \left(x^2 + y^2\right)dx + (x + y)dy$, where C is the boundary of the square having vertices $(\pm 1, \pm 1)$. **6**

OR

(i) State and prove the Green's theorem. **7**

(ii) Evaluate $\iint_{S} \overline{f}.\text{ndS}$, where $\overline{f} = (x^3 - yz, -2x^2y, z)$ and S is the surface of the cube with faces $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = a$, $y = a$, $z = a$. **6**

(B) Give the answer in brief. (any **two**). **4**

(i) Evaluate $\int x\,dx + y\,dy$ over the line $y = x^2$ from (0, 0) to (1, 1).

(ii) Write the statement of the Gauss Theorem.

(iii) Find the unit normal vector of surface $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4. (A) (i) Prove that the general solution of the linear partial differential equation $Pp + Qq = R$ is $F(u, v) = 0$, where, F is an arbitrary function and $u(x, y, z) = c_1$ and $v(x, y, z) = c_2$ form a solution of the equations $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$. **7**

(ii) Form a partial differential equation by eliminating the arbitrary function F and G from the equation $z = F(xy) + G\left(\frac{x}{y}\right)$. **6**

OR

(i) Obtain the general solution of $(y + z)\,p + (z + x)q = (x + y)$. **7**

(ii) Eliminate a, b from the equation $x^2 + (y - a)^2 + z^2 = b^2$ and obtain the general solution of $xp + yq = z$. **6**

(B) Give the answer in brief. (Any **two**). **4**

(i) Find order and degree of partial differential equation $x^3Z_{xy} - px + qy = 0$.

(ii) Solve $dx = dy = dz$.

(iii) If $x^2 + x + y - z = 0$, then p =___ and q = ____.

___