Seat No. : _______________

ME-114

March-2019

B.Sc., Sem.-III

CC-202 : Mathematics

(Linear Algebra - I)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ ચાર પ્રશ્નો છે.
(2) જમણી બાજુના અંક જે-તે પ્રશ્ન-પેટા પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

1. (A) (1) કોઈપણ સદિશ અવકાશ V માટે સાબિત કરો કે 7

(i) $\alpha\overline{0} = \overline{0}$, દરેક અદિશ α માટે

(ii) $0\ u = \overline{0}$, દરેક સદિશ $u \in V$ માટે.

(iii) $(-1)\ u = -u$, દરેક સદિશ $u \in V$ માટે.

(2) જો A અને B એ સદિશ અવકાશ V ના ઉપાવકાશો હોય તો સાબિત કરો કે $A \cap B$ પણ Vનો ઉપાવકાશ છે. શું $A \cup B$ એ V નો ઉપાવકાશ છે ? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો. 7

અથવા

(A) (1) સદિશ અવકાશના ઉપગણની વિસ્તૃતિની વ્યાખ્યા આપો. જો S એ સદિશ અવકાશ Vનો અરિક્ત ઉપગણ હોય તો સાબિત કરો કે [S] એ Sને સમાવતો નાનામાં નાનો Vનો ઉપાવકાશ છે. 7

(2) સાબિત કરો કે $S = \{ (x, y, z) \in V_3 / 2x + y - 5z = 0 \}$ એ V_3નો ઉપાવકાશ છે. 7

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો. (ગમે તે બે) 4

(1) સદિશ અવકાશનો ઉપાવકાશ થવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત લખો.

(2) $S =\{ (x_1, x_2, x_3) \in V_3 / x_2\, x_3 = 0 \}$. શું S એ V_3 નો ઉપાવકાશ છે ? સમર્થન કરો.

(3) વ્યાખ્યા આપો : પ્રત્યક્ષ સરવાળો.

2. (A) (1) વ્યાખ્યા આપો : સદિશ અવકાશ V નું પરિમાણ, પરિમાણ પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7

(2) સાબિત કરો કે ગણ $B = \{ (1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 1, 1) \}$ એ V_3 નો આધાર છે. 7

અથવા

(A) (1) સાબિત કરો કે n-પરિમાણીય સદિશ અવકાશ V માં n-સુરેખ સ્વાયત્ત સદિશોનો ગણ એ Vનો આધાર છે. 7

(2) ગણ $A = \{ (1, 0, 1, 0), (0, -1, 1, 0) \}$ ને V_4ના આધાર સુધી વિસ્તૃત કરો. 7

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો. (ગમે તે બે) 4

(1) ગણ $A = \{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 2, 3) \}$ સુરેખ સ્વાયત્ત કે સુરેખ અવલંબી છે, ચકાસો.

(2) જો $S = \{ x - 1, x + 1, x^2 + 2 \}$ હોય તો, S એ $P_3(R)$નો આધાર છે. કેમ ?

(3) સદિશ અવકાશ V_2ના બે ભિન્ન આધાર આપો.

3. (A) (1) સુરેખ પરિવર્તન T એ આધારના ઘટકો પરની તેની કિંમતો દ્વારા સંપૂર્ણ રીતે નિશ્ચિત કરી શકાય છે. **7**

(2) જો $T : V_2 \to V_3$ એવું સુરેખ પરિવર્તન હોય કે જેથી $T(1, 1) = (2, 0, 1)$ અને $T(2, -1) = (1, -1, 1)$ થાય તો $T(x, y)$ મેળવો. **7**

અથવા

(A) (1) કોટ્યાંક-શૂન્યાંક પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

(2) જો સુરેખ પરિવર્તન $T : V_3 \to V_3$, $T(e_1) = e_1 + e_2$, $T(e_2) = e_2 + e_3$ અને $T(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે જ્યાં $\{ e_1, e_2, e_3 \}$ એ V_3નો પ્રમાણિત આધાર છે. સાબિત કરો કે T વ્યસ્ત સંપન્ન છે અને T^{-1} શોધો. **7**

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો. (ગમે તે બે) **3**

(1) $T : V_3 \to V_3$ એ $T(x, y, z) = (x, y^2, z^3)$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે. શું T સુરેખ પરિવર્તન છે ?

(2) સુરેખ પરિવર્તન $T : V_3 \to V_2$ એ $T(x, y, z) = (x - y, x - z)$ વડે વ્યાખ્યાયિત હોય તો, $n(T)$ શોધો.

(3) સુરેખ પરિવર્તન $T : V_2 \to V_2$ એ $T(x, y) = (x, -y)$ વડે વ્યાખ્યાયિત હોય તો, T^{-1} શોધો.

4. (A) (1) વ્યાખ્યા આપો :

(i) સુરેખ પરિવર્તન સાથે સંકળાયેલ શ્રેણિક. **7**

(ii) શ્રેણિક સાથે સંકળાયેલ સુરેખ પરિવર્તન.

(2) સુરેખ પરિવર્તન $T : V_3 \to V_3$ એ $T(x, y, z) = (x - y + z, 2x + 3y - \frac{z}{2}, x + y - 2z)$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે. જો $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B_2 = \{ (1, 1, 0), (1, 2, 3), (-1, 0, 1) \}$ હોય તો, $(T : B_1, B_2)$ શોધો. **7**

અથવા

(A) (1) સાબિત કરો કે સદિશ અવકાશ $\mu_{m, n}$ નું પરિમાણ mn છે. **7**

(2) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ માટે વિસ્તાર ગણ, શૂન્યાવકાશ, કોટ્યાંક અને શૂન્યાંક મેળવો. **7**

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો. (ગમે તે બે) **3**

(1) સુરેખ પરિવર્તન $T : V_2 \to V_2$ એ $T(x, y) = (x, y)$ વડે વ્યાખ્યાયિત અને $B_1 = B_2 = \{e_1, e_2\}$ હોય તો T સાથે સંકળાયેલ શ્રેણિક શોધો.

(2) વ્યાખ્યા આપો : શ્રેણિકનો વિસ્તાર ગણ.

(3) જો શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ એ $n \times n$ કક્ષાનો શ્રેણિક હોય કે જેથી $a_{ij} = 1, \forall$ i અને j, તો Aનો શૂન્યાંક શોધો.

Seat No. : _______________

ME-114

March-2019

B.Sc., Sem.-III

CC-202 : Mathematics

(Linear Algebra - I)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) There are four questions.
(2) Figure to the right indicates full marks of the question/sub-question.

1. (A) (1) In any vector space V, prove that **7**

(i) $\alpha\overline{0} = \overline{0}$, for every scalar α.

(ii) $0\,u = \overline{0}$, for every vector $u \in V$.

(iii) $(-1)\,u = -u$, for every vector $u \in V$.

(2) Let A and B be two subspaces of a vector space V then prove that $A \cap B$ is also a subspace of V. Is $A \cup B$ a subspace of V ? Justify your answer. **7**

OR

(A) (1) Define span of subset of a vector space. If S is a non-empty subset of a vector space V, then prove that [S] is the smallest subspace of V containing S. **7**

(2) Prove that $S = \{ (x, y, z) \in V_3 \,/\, 2x + y - 5z = 0 \}$ is a subspace of V_3. **7**

(B) Answer in short : (Any **two**) **4**

(1) State necessary and sufficient condition to be a subspace of a vector space.

(2) Let $S = \{ (x_1, x_2, x_3) \in V_3 \,/\, x_2 x_3 = 0 \}$. Is S a subspace of V_3 ? Justify.

(3) Define : Direct Sum.

2. (A) (1) Define : Dimension of a vector space V. State and prove dimension theorem. **7**

(2) Prove that the set $B = \{ (1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 1, 1) \}$ is a basis for V_3. **7**

OR

(A) (1) Prove that in an n-dimensional vector space V, any set of n linearly independent vectors is a basis of V. **7**

(2) Expand the set $A = \{ (1, 0, 1, 0), (0, -1, 1, 0) \}$ to a basis of V_4. **7**

(B) Answer in short : (Any **two**) **4**

(1) Check set $A = \{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 2, 3) \}$ is linearly independent or linearly dependent.

(2) If $S = \{ x - 1, x + 1, x^2 + 2 \}$ then S is basis of $P_3(R)$. Why ?

(3) Give two different bases of vector space V_2.

3. (A) (1) A linear transformation T is completely determined by its values on the elements of a basis. **7**

(2) Let $T : V_2 \to V_3$ be a linear transformation such that $T(1, 1) = (2, 0, 1)$ and $T(2, -1) = (1, -1, 1)$ then find $T(x, y)$. **7**

OR

(A) (1) State and prove Rank-Nullity theorem. **7**

(2) Let $T : V_3 \to V_3$ be a linear transformation defined by $T(e_1) = e_1 + e_2$, $T(e_2) = e_2 + e_3$ and $T(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$, where $\{ e_1, e_2, e_3 \}$ is a standard basis of V_3. Prove that T is non-singular and find T^{-1}. **7**

(B) Answer in short : (Any **two**) **3**

(1) $T : V_3 \to V_3$ defined by $T(x, y, z) = (x, y^2, z^3)$. Is T a linear transformation ?

(2) A linear transformation $T : V_3 \to V_2$ defined by $T(x, y, z) = (x - y, x - z)$ then find n(T).

(3) A linear transformation $T : V_2 \to V_2$ defined by $T(x, y) = (x, -y)$ then find T^{-1}.

4. (A) (1) Define : **7**

(i) Matrix associated with a linear transformation.

(ii) Linear transformation associated with a matrix.

(2) Let a linear transformation $T : V_3 \to V_3$ defined by **7**

$T(x, y, z) = (x - y + z, 2x + 3y - \frac{z}{2}, x + y - 2z)$. If $B_1 = \{ e_1, e_2, e_3 \}$, $B_2 = \{ (1, 1, 0), (1, 2, 3), (-1, 0, 1) \}$ then find $(T : B_1, B_2)$.

OR

(A) (1) Prove that the dimension of vector space $\mu_{m, n}$ is mn. **7**

(2) Find the range, kernel, rank and nullity for a matrix $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. **7**

(B) Answer in short : (Any **two**) **3**

(1) Let a linear transformation $T : V_2 \to V_2$ defined by $T(x, y) = (x, y)$ and $B_1 = B_2 = \{e_1, e_2\}$ then obtain matrix associated with T.

(2) Define : Range of a matrix.

(3) Let matrix $A = [a_{ij}]$ be an $n \times n$ matrix such that $a_{ij} = 1, \forall$ i and j, then find nullity of A.