Seat No. : _______________

MD-116

March-2019

B.Sc., Sem.-III

CC-201 : Mathematics

(Advanced Calculus-I)

(For Gujarati Medium)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) બધા જ પ્રશ્નો ફરજીયાત છે.

(2) જરૂર જણાય ત્યાં ઉત્તર પ્રચલિત સંકેતોમાં મેળવો.

(3) ઉત્તરવહીમાં પ્રશ્નક્રમ તથા પેટાપ્રશ્નક્રમ પ્રશ્નપત્ર મુજબ જ લખો.

1. (a) (i) વિધેય $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$; $x^2 + y^2 \neq 0$ **7**

$= 0; x^2 + y^2 = 0$

ના બિંદુ (0, 0) આગળ સાતત્યની ચર્ચા કરો.

(ii) નીચેના વિધેયોના પુનરાવર્તિત લક્ષ બિંદુ (0, 0) આગળ મેળવો. **7**

(1) $f(x, y) = \frac{\sin(x + y)}{x + y}$

(2) $f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)}{x - y}$

અથવા

(i) સાબિત કરો : જો $\phi(x)$ એ $(a, \phi(a)) = (a, b)$ બિંદુએ સતત હોય અને $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L \in R$ હોય, તો $\lim_{x \to a} f(x, \phi(x))$ અસ્તિત્વ ધરાવે અને તે L ની બરાબર થાય.

(ii) નીચેના વિધેયોના લક્ષ મેળવો :

(1) $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

(2) $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \left(x^2 \sin \frac{y}{x}\right)$.

(b) નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો : (ગમે તે બે) **4**

(i) પુનરાવર્તિત લક્ષની વ્યાખ્યા આપો.

(ii) કિંમત મેળવો : $\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$.

(iii) ગણ $S \subset R^n$ ના લક્ષબિંદુની વ્યાખ્યા આપો.

2. (a) (i) સ્વાર્ત્ઝનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. તેનું પ્રતિપ સાચું છે ? ચકાસો. 7

(ii) જો $x^x y^y z^z = c$ હોય, તો સાબિત કરો કે $x = y = z$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -[x(1 + \log x)]^{-1}$; c અચળ સંખ્યા છે. 7

અથવા

(i) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$

$= 0$, $(x, y) = (0, 0)$ વિધેયનું (0, 0) બિંદુ આગળ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ની દિશામાં દિક્ વિકલન શોધો.

(ii) યંગનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(b) નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો : (ગમે તે બે) 4

(i) જો $U = e^{xyz}$ હોય તો $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ ની કિંમત શોધો.

(ii) દિક્ વિકલન $D_u f(x)$ શોધવાનું સૂત્ર લખો.

(iii) જો $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$ હોય, તો $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ શોધો.

3. (a) (i) m ઘાતવાળા દ્વિચલ વિધેય માટેનું ઑઈલરનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7

(ii) સાબિત કરો કે આપેલ પરિમિતિ ધરાવતા બધા જ ત્રિકોણ પૈકી સમબાજુ ત્રિકોણ મહત્તમ હોય છે. 7

અથવા

(i) વિધેય $f(x, y) = e^{ax}\cos by$ ના x અને y ના ઘાતમાં વિસ્તરણના પ્રથમ ત્રણ પદો મેળવો.

(ii) જો $u = \operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{\frac{x^{1/2} + y^{1/2}}{x^{1/3} + y^{1/3}}}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\tan u}{12}$.

(b) નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો : (ગમે તે બે) 3

(i) વિધેય $f(x, y)$ ની મેકલોરિન શ્રેઢી લખો.

(ii) દ્વિચલ વિધેયના વિકલનની વ્યાખ્યા આપો.

(iii) જો $f(x, y) = x \log y + y \log x$ હોય, તો $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ની કિંમત શોધો.

4. (a) (i) દ્વિચલ વિધેય માટેનું ટેઈલરનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7

(ii) વક્ર $f(x, y) = 0$ પરના દિક્‌બિંદુના અસ્તિત્વ માટેની આવશ્યક શરત તારવો. 7

અથવા

(i) વક્ર $r = f(\theta)$ ની વક્રતા ત્રિજ્યા માટેનું સમીકરણ શોધો.

(ii) વિધેય $f(x, y) = \log xy$ નું $(x - 1)$ અને $(y - 1)$ ની ઘાતમાં વિસ્તરણ કરો.

(b) નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો : (ગમે તે બે) 3

(i) સુરેખા $y = mx + c$ ની વક્રતા ત્રિજ્યા શું થાય ?

(ii) જો દ્વિબિંદુ નિશિત હોય, તો r, s અને t વચ્ચેનો સંબંધ લખો.

(iii) xy નું સ્થાનનીય સ્થિર મૂલ્ય $x + y = 1$ શરત નીચે શોધો.

Seat No. : ______________

MD-116

March-2019

B.Sc., Sem.-III

CC-201 : Mathematics
(Advanced Calculus-I)
(For English Medium)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) **All** questions are compulsory.
(2) Give your answers in usual notations, if necessary.
(3) Write question number and sub-question number in answer sheet according to the question paper.

1. (a) (i) Discuss the continuity at the point (0, 0), if **7**

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\ ;\ x^2 + y^2 \neq 0$$
$$= 0;\ x^2 + y^2 = 0$$

(ii) Find the iterated limits for function at the point (0, 0). **7**

(1) $f(x, y) = \dfrac{\sin(x + y)}{x + y}$

(2) $f(x, y) = \dfrac{(x^2 + y^2)}{x - y}$

OR

(i) Let function $\phi(x)$ is continuous at a point $(a, \phi(a)) = (a, b)$ and $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ exists and is equal to $L \in R$ then prove that $\lim_{x \to a} f(x, \phi(x))$ exists and is equal to L.

(ii) Evaluate the following limits, if exist :

(1) $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

(2) $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \left(x^2 \sin \dfrac{y}{x}\right)$.

(b) Give the answers in brief : (Any **two**) **4**

(i) Define iterated limits.

(ii) Evaluate $\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

(iii) Define limit point of set $S \subset R^n$.

2. (a) (i) State and prove Schwartz's theorem. Is converse true ? Justify. **7**

(ii) If $x^x\ y^y\ z^z = c$ then prove at $x = y = z$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\,[x(1 + \log x)]^{-1}$; c is constant. **7**

OR

(i) Find the directional derivative of the function

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \neq (0, 0)$$
$$= 0, \qquad (x, y) = (0, 0)$$

at point (0, 0) along the direction of the vector $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(ii) State and prove Young's theorem.

(b) Give the answers in brief : (Any **two**) **4**

(i) If $U = e^{xyz}$ then find the value of $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$.

(ii) Write the formula to find directional derivative $D_u\, f(x)$.

(iii) If $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$ then find $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$.

3. (a) (i) State and prove Euler's theorem on homogenous function of two variables x and y having degree m. **7**

(ii) Show that of all triangles, having given perimeter, the largest is an equilateral triangle. **7**

OR

(i) Find first three terms in the expansion of $f(x, y) = e^{ax}\cos by$ in the power x and y.

(ii) If $u = \mathrm{cosec}^{-1}\sqrt{\frac{x^{1/2} + y^{1/2}}{x^{1/3} + y^{1/3}}}$ then prove that $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\tan u}{12}$.

(b) Give the answers in brief : (Any **two**) **3**

(i) Write Maclaurin's series of function $f(x, y)$.

(ii) Define differentiation of function of two variables.

(iii) If $f(x, y) = x \log y + y \log x$ then find the value of $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

4. (a) (i) State and prove Taylor's for the function of two variables. **7**

(ii) Derive a necessary condition for the existence of a double point on the curve $f(x, y) = 0$. **7**

OR

(i) Derive the formula of radius of curvature for the curve $r = f(\theta)$.

(ii) Expand $f(x, y) = \log xy$ in the power of $(x - 1)$ and $(y - 1)$.

(b) Give the answers in brief : (Any **two**) **3**

(i) What is the curvature of a straight-line $y = mx + c$?

(ii) If double point is NODE then write the relation between r, s and t.

(iii) Find the extreme value of xy under the condition $x + y = 1$.