Seat No. : ______________

XR-118

April-2013

B.Sc. (Sem. – II)

Mathematics : MAT-103

(Differential Equation)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) **બધા** જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

(2) **બધા** જ પ્રશ્નોના ગુણ સરખા છે.

1. (અ) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ નાં ઉકેલ માટેની રીત સમજાવો. જ્યાં P અને Q એ x નાં વિધેય છે.

$x\frac{dy}{dx} - y = 2x^3$ નો ઉકેલ પણ મેળવો.

અથવા

લાગ્રાંજનું વિકલ સમીકરણ લખો અને તેના ઉકેલની રીત સમજાવો.

$x + y = \left(\frac{1+P}{1-P}\right)^2$ નો ઉકેલ પણ મેળવો. જ્યાં $P = \frac{dy}{dx}$.

(બ) ગમે તે **બે**ના ઉકેલ મેળવો :

(1) $(e^x y + 2x \sin y)dx + (e^x + x^2 \cos y)dy = 0$

(2) $x\frac{dy}{dx} + y = x^3y^4$

(3) $P^2 + 2Py \cot x = y^2$, જ્યાં $P = \frac{dy}{dx}$.

2. (અ) જો $f(a) \neq 0$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax}$, જ્યાં $D = \frac{d}{dx}$.

$\frac{1}{9D^2 - 1}e^{-x}$નું સાદુંરૂપ આપો.

અથવા

જો $f(-a^2) \neq 0$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{f(D^2)} \cos ax = \frac{1}{f(-a^2)} \cos ax$; જ્યાં $D = \frac{d}{dx}$.

$\frac{1}{D^2 + 4} (\cos 3x + \cos 5x)$નું સાદુંરૂપ આપો.

(બ) ગમે તે **બે**ના ઉકેલ મેળવો :

(1) $\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + 5\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

(2) $(D^3 + D^2 + D + 1)y = \sin 2x.$

(3) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 2 \log x.$

3. (અ) R^3 માં ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ પરનાં (α, β, γ) બિંદુએ સ્પર્શતલ અને અભિલંબનાં સમીકરણો મેળવો.

અથવા

સમતલ $lx + my + nz = p$ એ કેન્દ્રીય શાંકવજ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ ને સ્પર્શે તે માટેની શરત મેળવો. અને સ્પર્શબિંદુનાં યામ પણ મેળવો.

(બ) ગમે તે **બે** ગણો :

(1) સાબિત કરો કે ગોલકો $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z - 86 = 0$ અને $x^2 + y^2 + z^2 - 20x - 36y - 30z + 424 = 0$ પરસ્પર બહારથી સ્પર્શે છે.

(2) ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10y - 23 = 0$ અને સુરેખા $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-5}$ નો છેદ મેળવો.

(3) સાબિત કરો કે ગોલકો $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ અને $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y + 2z + 5 = 0$ પરસ્પર લંબચ્છેદી છે.

4. (અ) શાંકવનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો અને શાંકવ $-4r \cos \theta = r - 12$નો પ્રકાર શોધો.

અથવા

R^3 માં (α, β, γ) બિંદુમાંથી પસાર થતી અને ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ને સ્પર્શતી સર્જકરેખાવાળા પરિસ્પર્શી શંકુનું સમીકરણ મેળવો.

(બ) ગમે તે **બે** ગણો :

(1) ધ્રુવીય યામ $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ અને $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ બિંદુઓમાંથી પસાર થતી સુરેખાનું ધ્રુવીય સમીકરણ શોધો. તેનાં પર ધ્રુવમાંથી દોરેલ લંબની લંબાઈ શોધો.

(2) સાબિત કરો કે સમીકરણ $33x^2 + 13y^2 - 95z^2 - 144yz - 96zx - 48xy = 0$ સમશંકુ દર્શાવે છે. તેનો અક્ષ અને અર્ધશિર:કોણ શોધો.

(3) ત્રિજ્યા 3 અને અક્ષ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$ હોય તેવા સમનળાકારનું સમીકરણ મેળવો.

5. યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો :

(1) વિકલ સમીકરણ $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{d^2y}{dx^2}$ ની કક્ષા _______ છે.

(a) 2 (b) 1

(c) $\frac{3}{2}$ (d) એકપણ નહિ

(2) વિકલ સમીકરણ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ યથાર્થ હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત _______ છે.

(a) $\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}$ (b) $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

(c) $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y}$ (d) એકપણ નહિ

(3) જેનો સામાન્ય ઉકેલ $y = A \cos x + B \sin x$ હોય તેવું વિકલ સમીકરણ ______ છે.

(a) $\frac{d^2y}{dx^2} = A \cos x + B \sin x$ (b) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (d) એકપણ નહિ

(4) વિકલ સમીકરણ $y = Px + \log P$ જ્યાં $P = \frac{dy}{dx}$ નો ઉકેલ ______ છે.

(a) $y = cx + \log c$ (b) $y = cx + \log x$

(c) $y = Px + \log c$ (d) એકપણ નહિ

(5) વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$ નો સામાન્ય ઉકેલ ______ છે.

(a) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 3x$ (b) $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$

(c) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$ (d) એકપણ નહિ

(6) $\frac{1}{D - \propto} f(x) =$ _______; જ્યાં $\propto$ અચળ છે.

(a) $e^{\propto x} \int e^{-\propto x} f(x)\, dx$ (b) $e^{-\propto x} \int e^{\propto x} f(x)\, dx$

(c) $e^{\propto x} \int e^{\propto x} f(x)\, dx$ (d) એકપણ નહિ

(7) $\frac{1}{(D - m)^r} e^{mx} =$ ________ જ્યાં m અચળ છે અને $r \in N$.

(a) $\frac{x^r}{r!} e^{mx}$ (b) $\frac{x^r}{r} e^{mx}$

(c) $\frac{x^r}{r!}$ (d) એકપણ નહિ

(8) R^3 માં જો બે ગોલકો પરસ્પર એક કરતાં વધુ બિંદુ એ છેદે તો છેદગણ _________ છે.

(a) વર્તુળ (b) એકાકીગણ

(c) સુરેખા (d) એકપણ નહિ

(9) R^3 માં ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 8y + 4z + 20 = 0$ પરનાં (–2, –2, 0) બિંદુએ દોરેલાં સ્પર્શતલનું સમીકરણ _________ છે.

(a) $-x - 2y + 2z + 6 = 0$ (b) $x + 2y + 2z + 6 = 0$

(c) $x + 2y + 2z = 6$ (d) એકપણ નહિ

(10) ઉપવલયજનું વ્યાપક સમીકરણ ________ છે.

(a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (d) એકપણ નહિ

(11) R^2 માં $\left(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ ધ્રુવીય યામવાળા બિંદુના કાર્તેઝીય યામ _________ છે.

(a) (–1, –1) (b) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (d) એકપણ નહિ

(12) વર્તુળ $r^2 - 2r(g \cos \theta + f \sin \theta) + c = 0$; જ્યાં g, f, c અચળનું કેન્દ્ર ______ છે.

(a) $\left(\sqrt{g^2 + f^2 - c}, \text{ten}^{-1}\left(\frac{f}{g}\right)\right)$ (b) $\left(\sqrt{g^2 + f^2}, \text{ten}^{-1}\left(\frac{f}{g}\right)\right)$

(c) (–g, –f) (d) એકપણ નહિ

(13) જો બિંદુ Aનાં નળાકારીય યામ $\left(2, \frac{\pi}{4}, 2\right)$ હોય તો Aનાં કાર્તેઝીય યામ _______ છે.

(a) $\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ (b) $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$

(c) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ (d) એકપણ નહિ

(14) ઉદગમબિંદુ શિરોબિંદુ X-અક્ષ અક્ષવાળા અને θ અર્ધશિર:કોણવાળા સમશંકુનું સમીકરણ _______ છે.

(a) $y^2 + z^2 = x^2 \tan^2\theta$ (b) $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\theta$

(c) $x^2 + z^2 = y^2 \tan^2\theta$ (d) એકપણ નહિ

Seat No. : _______________

XR-118

April-2013

B.Sc. (Sem. – II)

Mathematics : MAT-103

(Differential Equation)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) **All** questions are compulsory.

(2) **All** questions carry equal marks.

1. (a) Explain the method to solve a differential equation $\frac{dy}{dx} + Py = Q$; where P and Q are functions of x. Also solve $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^3$.

OR

Write the Lagrange's differential equation and explain the method of it's solution. Also solve $x + y = \left(\frac{1 + P}{1 - P}\right)^2$; where $P = \frac{dy}{dx}$.

(b) Solve any **two** :

(1) $(e^x y + 2x \sin y)dx + (e^x + x^2 \cos y)dy = 0$

(2) $x\frac{dy}{dx} + y = x^3y^4$

(3) $P^2 + 2Py \cot x = y^2$, where $P = \frac{dy}{dx}$.

2. (a) If $f(a) \neq 0$ then prove that $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax}$; where $D = \frac{d}{dx}$

Also simplify $\frac{1}{9D^2 - 1}e^{-x}$.

OR

If $f(-a^2) \neq 0$ then prove that $\frac{1}{f(D^2)} \cos ax = \frac{1}{f(-a^2)} \cos ax$; where $D = \frac{d}{dx}$

Also simplify $\frac{1}{D^2 + 4} (\cos 3x + \cos 5x)$.

(b) Solve any **two** :

(1) $\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + 5\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

(2) $(D^3 + D^2 + D + 1)y = \sin 2x$.

(3) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$.

3. (a) Find the equation of tangent plane and normal to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ in R^3 at the point (α, β, γ) on it.

OR

Find the condition that the plane $lx + my + nz = p$ touches the central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and also obtain the co-ordinates of the point of contact.

(b) Attempt any **two** :

(1) Prove that the spheres $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z - 86 = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 - 20x - 36y - 30z + 424 = 0$ touch each other externally.

(2) Find the intersection of a sphere $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10y - 23 = 0$ and a line $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-5}$.

(3) Prove that the spheres $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y + 2z + 5 = 0$ are orthogonal spheres.

4. (a) Obtain the polar equation of a conic. Find the type of conic $-4r \cos \theta = r - 12$.

OR

Obtain the equation of an enveloping cone, having generator touching sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ and passing through a point (α, β, γ) in R^3.

(b) Attempt any **two** :

(1) Find the polar equation of the st-line passing through $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ and $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$. Find the length of perpendicular drawn from the pole upon it.

(2) Prove that the equation $33x^2 + 13y^2 - 95z^2 - 144yz - 96zx - 48xy = 0$ represents a right circular cone. Find it's axis and semi-vertical angle.

(3) Find the equation of the right cylinder, having radius 3 and axis $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$

5. Fill in the blank with appropriate answer :

(1) The order of a differential equation $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{d^2y}{dx^2}$ is ________.

(a) 2 (b) 1

(c) $\frac{3}{2}$ (d) None of these

(2) The necessary and sufficient conditions for the differential equation $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ to be exact is ________

(a) $\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}$ (b) $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

(c) $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y}$ (d) None of these

(3) The differential equation is ________; whose general solution is $y = A \cos x + B \sin x$

(a) $\frac{d^2y}{dx^2} = A \cos x + B \sin x$ (b) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (d) none of these

(4) The general solution of differential equation $y = Px + \log P$ is ________; where $P = \frac{dy}{dx}$

(a) $y = cx + \log c$ (b) $y = cx + \log x$

(c) $y = Px + \log c$ (d) none of these

(5) The general solution of differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$ is __________

(a) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 3x$ (b) $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$

(c) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$ (d) none of these

(6) $\frac{1}{D - \propto} f(x) =$ ________; where $\propto$ is constant.

(a) $e^{\propto x} \int e^{-\propto x} f(x)\, dx$ (b) $e^{-\propto x} \int e^{\propto x} f(x)\, dx$

(c) $e^{\propto x} \int e^{\propto x} f(x)\, dx$ (d) None of these

(7) $\frac{1}{(D - m)^r} e^{mx} =$ ________ where m is constant and $r \in N$.

(a) $\frac{x^r}{r!} e^{mx}$ (b) $\frac{x^r}{r} e^{mx}$

(c) $\frac{x^r}{r!}$ (d) none of these

(8) In a R^3, if two spheres are intersect each other more than one point then intersection is _________

(a) Circle (b) Singleton set

(c) Line (d) None of these

(9) The equation of tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 8y + 4z + 20 = 0$ in R^3 at the point (–2, –2, 0) is _________

(a) $-x - 2y + 2z + 6 = 0$ (b) $x + 2y + 2z + 6 = 0$

(c) $x + 2y + 2z = 6$ (d) none of these

(10) The general equation of ellipsoid is ________.

(a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (d) none of these

(11) The Cartesian co-ordinates of the point, having polar co-ordinates $\left(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ in R^2 is _________.

(a) (–1, –1) (b) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (d) none of these

(12) The center of the circle $r^2 - 2r(g \cos \theta + f \sin \theta) + c = 0$ is _________; where g, f, c are constant.

(a) $\left(\sqrt{g^2 + f^2 - c}, \tan^{-1}\left(\frac{f}{g}\right)\right)$ (b) $\left(\sqrt{g^2 + f^2}, \tan^{-1}\left(\frac{f}{g}\right)\right)$

(c) (–g, –f) (d) none of these

(13) If the cylindrical co-ordinates of point A are $\left(2, \frac{\pi}{4}, 2\right)$ the Cartesian co-ordinates of A is __________

(a) $\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ (b) $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$

(c) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ (d) none of these

(14) The equation of right circular cone; whose vertex is origin, axis is x-axis and semi-vertical angle is θ is _________.

(a) $y^2 + z^2 + x^2 \tan^2\theta$ (b) $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\theta$

(c) $x^2 + z^2 = y^2 \tan^2\theta$ (d) none of these

____