Seat No. : ______________

MK-118

July-2021

B.Sc., Sem.-I

CC-101 : Mathematics
(Calculus and Matrix Algebra)

Time : 2 Hours] **[Max. Marks : 50**

સૂચના : (1) Section – Iના દરેક પ્રશ્નના સમાન ગુણ છે.

(2) Section – Iમાંથી કોઈપણ ત્રણ પ્રશ્નોના જવાબ લખો.

(3) Section – IIનો પ્રશ્ન નંબર–**9** ફરજીયાત છે.

Section – I

1. (અ) લાયબ્નીઝ પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

(બ) જો $y = \sin(m\cos^{-1} x)$; $x \in]-1, 1[$ હોય તો સાબિત કરો કે

$$(1 - x^2)\, y_{n+2} - (2n + 1)\, x y_{n+1} - (n^2 - m^2) y_n = 0$$ **7**

2. (અ) અનંત વાસ્તવિક ધનપદોવાળી શ્રેઢી માટે દ' એલમ્બર્ટની ગુણોત્તર કસોટી લખો અને સાબિત કરો. **7**

(બ) શ્રેઢીની અભિસારિતા ચર્ચો.

(1) $\Sigma[(n^3 + 1)^{1/3} - n]$

(2) $\Sigma(-1)^n [\sqrt{n} - \sqrt{n-1}]$ **7**

3. (અ) લાગ્રાન્જનું મધ્યકમાન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

(બ) $f(x) = \sqrt{x}$ અને $g(x) = 2x + 1$ વડે વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેયો માટે અંતરાલ [1, 4] માં કોશીના મધ્યકમાન પ્રમેયનું સમર્થન કરો. શક્ય હોય તો અંતરાલમાં સંખ્યા 'c' મેળવો. **7**

4. (અ) મેકલોરીનનું પ્રમેય લખો અને $f(x) = \cos x$; $x \in R$ નું x ના ઘાતમાં વિસ્તરણ મેળવો. **7**

(બ) લક્ષ મેળવો.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} (\sec^2 x)^{\cot^2 x}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\cot^2 x}\right]$ **7**

5. (અ) જો A એ n-કક્ષાનો ચોરસ શ્રેણિક હોય તો સાબિત કરો કે $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)\, A = |A|\, I_n$. **7**

(બ) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$ ને સંમિત અને વિ-સંમિત શ્રેણિકોના સરવાળા સ્વરૂપે દર્શાવો. **7**

6. (અ) જો A એ $m \times n$ કક્ષાનો અને B એ $n \times p$ કક્ષાનો શ્રેણિક હોય તો સાબિત કરો કે $(AB)^T = B^T A^T$. **7**

(બ) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -1+3i \\ -5 & i & 4-2i \end{bmatrix}$ માટે ચકાસો કે $A^* = \overline{(A^T)}$. **7**

7. (અ) જો λ $(\lambda \neq 0)$ એ વ્યસ્ત સંપન્ન શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_n$ નું લાક્ષણિક મૂલ્ય હોય તો બતાવો કે

(i) $\frac{1}{\lambda}$ એ A^{-1} નું લાક્ષણિક મૂલ્ય છે.

(ii) $\frac{|A|}{\lambda}$ એ adj A નું લાક્ષણિક મૂલ્ય છે. **7**

(બ) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો મેળવો તથા કોઈપણ એક લાક્ષણિક મૂલ્યને અનુરૂપ લાક્ષણિક સદીશ શોધો. **7**

8. (અ) કેલે-હેમીલ્ટન પ્રમેયની મદદથી શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવો. **7**

(બ) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ નું લાક્ષણિક સમીકરણ મેળવો અને શ્રેણિક બહુપદી,

$A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I$ વડે નિરૂપણ પામતો શ્રેણિક શોધો. **7**

Section – II

9. ટૂંકમાં જવાબ આપો. (કોઈપણ **આઠ**) **8**

(1) જો $y = (2x + 3)^4$ હોય તો $y_4(1)$ મેળવો.

(2) જો $y = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}(2 + x)}$ હોય તો y_n શોધો.

(3) શ્રેઢી $\Sigma \dfrac{1}{n^{3/2}}$ ની અભિસારિતા જણાવો.

(4) વિધેય $f(x) = | x - 1 |, x \in [0, 2]$ માટે લાગ્રાંજનું મધ્યકમાન પ્રમેય પ્રયોજી શકાય કે કેમ ? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

(5) વિધેય $(1 + x)^m$ નું વિસ્તરણ xના પદમાં લખો.

(6) બતાવો કે $f(x) = x^5 + 1, x \in R$ માટે વધતું વિધેય છે.

(7) ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A + A^*$ હરમિશીયન શ્રેણિક છે દર્શાવો.

(8) ઉર્ધ્વ ત્રિકોણીય શ્રેણિકની વ્યાખ્યા ઉદાહરણ સહિત આપો.

(9) શ્રેણિક Aનો વ્યસ્ત શ્રેણિક અસ્તિત્વ ધરાવે તે માટેની શરત જણાવો.

(10) સુરેખ સમીકરણ સંહતિ $AX = B$ માટે, અનન્ય ઉકેલ ક્યારે મળે ?

(11) શ્રેણિક Aનું લાક્ષણિક સમીકરણ લખો.

(12) કેલે-હેમીલ્ટન પ્રમેય લખો.

Seat No. : _______________

MK-118

July-2021

B.Sc., Sem.-I

CC-101 : Mathematics
(Calculus and Matrix Algebra)

Time : 2 Hours] **[Max. Marks : 50**

Instructions : (1) All Questions in **Section I** carry equal marks.
(2) Attempt any **THREE** questions in **Section I**.
(3) Question **9** in **Section II** is **COMPULSORY**.

Section – I

1. (A) State and prove Leibnitz's theorem. **7**

   (B) If $y = \sin(m\cos^{-1} x)$; $x \in]-1, 1[$ then prove that

   $(1 - x^2)\, y_{n+2} - (2n + 1)\, x y_{n+1} - (n^2 - m^2) y_n = 0$ **7**

2. (A) State and prove De'Alembert ratio test for the infinite positive series. **7**

   (B) Discuss the convergence of the following series :

   (1) $\Sigma[(n^3 + 1)^{1/3} - n]$

   (2) $\Sigma(-1)^n [\sqrt{n} - \sqrt{n-1}]$ **7**

3. (A) State and prove Lagrange's Mean Value Theorem. **7**

   (B) Verify Cauchy's mean value theorem for the functions $f(x) = \sqrt{x}$ and $g(x) = 2x + 1$ in the interval [1, 4], if possible then find 'c'. **7**

4. (A) State Maclaurin's theorem. Using this obtain $f(x) = \cos x$; $x \in R$ in the powers of x. **7**

(B) Evaluate limit.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} (\sec^2 x)^{\cot^2 x}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\cot^2 x}\right]$ **7**

5. (A) For a square matrix A of order n, prove that $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)\, A = |A|\, I_n$. **7**

(B) Express the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$ as a sum of symmetric and skew-symmetric matrix. **7**

6. (A) For matrix A of order $m \times n$ and matrix B of order $n \times p$, prove that $(AB)^T = B^T A^T$. **7**

(B) Verify $A^* = \overline{(A^T)}$ for a matrix $A = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -1+3i \\ -5 & i & 4-2i \end{bmatrix}$. **7**

7. (A) If λ ($\lambda \neq 0$) is an Eigen value of an invertible matrix $A = [a_{ij}]_n$ then show that

(i) $\frac{1}{\lambda}$ is the Eigen value of A^{-1}.

(ii) $\frac{|A|}{\lambda}$ is the Eigen value of adj A. **7**

(B) Find the Eigen values and Eigen vector corresponding to any one Eigen value of matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **7**

8. (A) Using Cayley – Hamilton theorem find the inverse matrix of a matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$ **7**

(B) For a matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ find a matrix represented by the matrix polynomial,

$A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I$. **7**

Section – II

9. Give answer in short. (Attempt any **Eight**) **8**

(1) If $y = (2x + 3)^4$ then find $y_4(1)$.

(2) If $y = \dfrac{1}{\text{cosec}(2 + x)}$ then find y_n.

(3) Write the convergence of $\Sigma \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

(4) Can we apply Lagrange's theorem for function $f(x) = | x - 1 |, x \in [0, 2]$? Justify your answer.

(5) Write the expression for $(1 + x)^m$ in terms of x.

(6) Show that the function $f(x) = x^5 + 1, x \in R$ increasing.

(7) Show that $A + A^*$ is Hermitian matrix for a square matrix A.

(8) Define Upper triangular matrix with illustration.

(9) Write the condition for the existence of inverse of a square matrix A.

(10) For the system of linear equations $AX = B$, when the unique solution exist ?

(11) Write down the characteristic equation of a square matrix A.

(12) State the Cayley – Hamilton theorem.