

DF-103

December-2021

B.Sc., Sem.-III

**202 : Mathematics
(Linear Algebra-I)
Theory**

Time : 2 Hours]

[Max. Marks : 50

- સૂચના : (1) પ્રશ્નો 1 થી 8 માંથી કોઈપણ ત્રણના જવાબ આપો.
(2) પ્રશ્ન 9 ફરજિયાત છે.
(3) જમણી બાજુના અંક ગુણ દર્શાવે છે.

વિભાગ-I

1. (A) સાબિત કરો કે સદિશ અવકાશ v નો અરિક્ત ઉપગણ S એ V નો ઉપાવકાશ હોય તો અને તો જ તે નીચે મુજબની શરતોનું પાલન કરે : 7
(i) જો $u, v \in S$ તો $u + v \in S$
(ii) જો $u \in S$ અને α અદિશ તો $\alpha u \in S$.
(B) સાબિત કરો કે $(3, 7) \in \{(1, 2), (0, 1)\}$ પણ $(3, 7) \notin \{(1, 2), (2, 4)\}$. 7
2. (A) સદિશ અવકાશની વ્યાખ્યા આપો. કોઈપણ સદિશ અવકાશ V માં સાબિત કરો કે 7
(i) $\alpha \bar{0} = \bar{0}$ પ્રત્યેક અદિશ α માટે
(ii) $0u = \bar{0}$ પ્રત્યેક $u \in V$ અને
(iii) $(-1)u = -u$ પ્રત્યેક $u \in V$.
(B) જો $L = \{(x, 2x, -3x, x) | x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$ તો સાબિત કરો કે L એ \mathbb{R}^4 નો ઉપાવકાશ છે. 7
3. (A) પરિમાણ પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7
(B) સાબિત કરો કે ગણ $\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 1, 1)\}$ એ \mathbb{R}^3 નો આધાર છે. 7
4. (A) જો U અને W એ સદિશ અવકાશ V ના ઉપાવકાશો હોય તો સાબિત કરો કે $U + W$ એ V નો ઉપાવકાશ છે, તથા $U + W = [U \cup W]$. 7
(B) જો U અને W એ સદિશ અવકાશ V ના ઉપાવકાશો છે; તથા $Z = U + W$ તો સાબિત કરો કે $Z = U \oplus W$ હોય તો અને તો જ તે નીચે મુજબની શરતોનું પાલન કરે :
કોઈપણ $z \in Z$ ને $z = u + w$; $u \in U$, $w \in W$ ને અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય છે. 7

5. (A) કોટયાંક-શૂન્યાંક પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7
 (B) જો સુરેખ પરિવર્તન $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ એ $Te_1 = (1, 1, 1)$, $Te_2 = (1, -1, 1)$, $Te_3 = (1, 0, 0)$ અને $Te_4 = (1, 0, 1)$ વડે વ્યાખ્યાયિત હોય તો $r(T) + n(T) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$ ચકાશો. 7
6. (A) સુરેખ વિધેયની વ્યાખ્યા આપો. જો $T : U \rightarrow V$ એ સુરેખ વિધેય હોય તો સાબિત કરો કે 7
 (i) $T(\bar{0}_u) = \bar{0}_v$
 (ii) $T(-u) = -T(u)$ અને
 (iii) $T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_4 u_4)$
 $= \alpha_1 T u_1 + \alpha_2 T u_2 + \dots + \alpha_4 T u_4$
 (B) જો $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ હોય તો સાબિત કરો કે $T(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ એ સુરેખ વિધેય છે. 7
7. (A) જો $T : U \rightarrow V$ એ વ્યસ્ત કારક સુરેખ પરિવર્તન હોય તો સાબિત કરો કે $T^{-1} : U \rightarrow V$ પણ સુરેખ, એક-એક અને વ્યાપ્ત છે. 7
 (B) જો સુરેખ-પરિવર્તન $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ એ
 $T(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 - \frac{x_3}{2}, x_1 + x_2 - 2x_3 \right)$ વડે વ્યાખ્યાયિત હોય અને જો $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B_2 = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (-1, 0, 1)\}$ હોય તો $(T : B_1, B_2)$ મેળવો. 7
8. (A) સાબિત કરો કે સદ્દિશ અવકાશ $\mu_{m \times n}$ નું પરિમાણ mn છે. 7
 (B) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 7
 માટે કોટયાંક-શૂન્યાંક પ્રમેય ચકાશો.

વિભાગ-II

9. ટૂંકમાં જવાબ આપો : (કોઈપણ ચાર) 8
 (1) સુરેખ પરિવર્તન માટે શૂન્યાવકાશ અને વિસ્તાર ગણની વ્યાખ્યા આપો.
 (2) વ્યસ્ત કારક સુરેખ પરિવર્તનની વ્યાખ્યા આપો.
 (3) સુરેખ પરિવર્તન સાથે સંકળાયેલા શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો.
 (4) સદ્દિશ અવકાશના ઉપાવકાશની વ્યાખ્યા આપો.
 (5) I.I, I.D અને ગણની વિસ્તૃતિની વ્યાખ્યા આપો.
 (6) સદ્દિશ અવકાશના પરિમાણની વ્યાખ્યા આપો.

DF-103

December-2021

B.Sc., Sem.-III

**202 : Mathematics
(Linear Algebra-I)
Theory**

Time : 2 Hours]

[Max. Marks : 50

- Instructions :** (1) Attempt any **three** questions from questions **1 to 8**.
 (2) Question No. **9** is compulsory.
 (3) The figures on the right indicates marks of the question.

Section-I

1. (A) Prove that a non-empty subset of a vector space v is a subspace of V if and only the following conditions are satisfied : 7
 (i) If $u, v \in S$ then $u + v \in S$
 (ii) If $u \in S$ and α a scalar then $\alpha u \in S$.
 (B) Prove the $(3, 7) \in [\{(1, 2), (0, 1)\}]$ but $(3, 7) \notin [\{(1, 2), (2, 4)\}]$. 7
2. (A) Define vector space. In any vector space V , prove that 7
 (i) $\alpha \bar{0} = \bar{0}$ for every scalar α
 (ii) $0u = \bar{0}$ for every $u \in V$
 (iii) $(-1)u = -u$ for every $u \in V$
 (B) Let $L = \{(x, 2x, -3x, x) | x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$. Then prove that L is a subspace of \mathbb{R}^4 . 7
3. (A) State and prove dimension theorem. 7
 (B) Prove that the set $\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 1, 1)\}$ is a basis of \mathbb{R}^3 . 7
4. (A) If U and W are two subspaces of a vector space V , then prove that $U + W$ is a subspace of V and $U + W = [U \cup W]$. 7
 (B) Let U and W be two subspaces of a vector space V and $Z = U + W$. Then prove that $Z = U \oplus W$ iff the following condition is satisfied :
 Any vector $z \in Z$ can be expressed uniquely as the sum $z = u + w$; $u \in U$,
 $w \in W$. 7

5. (A) State and prove rank-nullity theorem. 7
 (B) Let $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear map; defined by $Te_1 = (1, 1, 1)$, $Te_2 = (1, -1, 1)$, $Te_3 = (1, 0, 0)$, $Te_4 = (1, 0, 1)$. Then verify that $r(T) + n(T) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$. 7
6. (A) Define linear transformation. If $T : U \rightarrow V$ be a linear map then prove that 7
 (i) $T(\bar{0}_u) = \bar{0}_v$
 (ii) $T(-u) = -T(u)$ and
 (iii) $T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_4 u_4)$
 $= \alpha_1 Tu_1 + \alpha_2 Tu_2 + \dots + \alpha_4 Tu_4$
 (B) Define $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; by the rule $T(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$. Prove that T is a linear-map. 7
7. (A) Let $T : U \rightarrow V$ be a non-singular linear map. Then prove that $T^{-1} : U \rightarrow V$ is a linear, one-one and onto. 7
 (B) Let a linear map $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be defined by

$$T(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 - \frac{x_3}{2}, x_1 + x_2 - 2x_3 \right).$$
 If $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, the standard basis and $B_2 = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (-1, 0, 1)\}$. Then find $(T : B_1, B_2)$. 7
8. (A) Prove that the dimension of the vector space $\mu_{m \times n}$ is mn . 7
 (B) Let $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 7
 Verify Rank-nullity theorem.

Section-II

9. Give the answer in brief : (Any **four**) 8
 (1) Define range and Kernel of a linear map.
 (2) Define non-singular linear map.
 (3) Explain matrix associated with a linear map.
 (4) Define subspace of a vector space.
 (5) Define $l.I$, $l.D$ and span of a set in a vector space.
 (6) Define dimension of a vector space.