

Seat No. : _____

MD-118

March-2022

B.Sc., Sem.- I

101 : Mathematics

(Calculus and Matrix Algebra)

Time : 2 Hours]

[Max. Marks : 50

- સૂચનાઓ : (1) વિભાગ-Iના બધા પ્રશ્નોના ગુણ સમાન છે
(2) વિભાગ -Iમાંથી ગમે તે ત્રણનો જવાબ લખો.
(3) વિભાગ-II પ્રશ્ન-9 ફરજીયાત છે.

વિભાગ - I

- (A) લાયબનીઝ પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7
(B) જો $y = \frac{x}{(x-1)(x+2)}$ તો y_n શોધો. 7
- (A) અનંત વાસ્તવિક ધન પહોવાળી શ્રેઢી માટે દ' એલમ્બર્ટની ગુણોત્તર કસોટી લખો અને સાબિત કરો. 7
(B) શ્રેઢીની અભિસારીતા વ્યાખ્યાયિત કરો. નીચેની શ્રેઢીની અભિસારીતા ચર્ચો :
(i) $\sum \frac{3n+1}{2n+3}$ (ii) $\sum \frac{x^n}{n!}$ 7
- (A) લાંગ્રાન્જનું મધ્યક માન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7
(B) $\cos x$ નું x ની ઘાતમાં વિસ્તરણ કરો. 7
- (A) લા'પીટલનો પ્રથમ પ્રમેય લખો અને $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}$ ની કિંમત શોધો. 7
(B) વિધેય $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $[0, 2]$ માટે રોલના મધ્યક માન પ્રમેયનું સમર્થન કરો. 7
- (A) વ્યાખ્યા આપો : સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણીકો. જો A ચોરસ શ્રેણિક હોય તો સાબિત કરો કે $A + A^T$ સંમિત શ્રેણિક અને $A - A^T$ વિસંમિત છે. 7
(B) શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 12 & -1 \end{bmatrix}$ ને હાર-સંક્ષિપ્ત સોપાન સ્વરૂપમાં ફેરવો અને તેનો કોટિ શોધો. 7

6. (A) n ક્રમના ચોરસ શ્રેણિક A માટે સાબિત કરો કે $A \cdot (\text{adj } A) = (\text{Adj } A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$ 7
- (B) ચોરસ શ્રેણિકના વ્યસ્તની વ્યાખ્યા આપો અને શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ માટે A^{-1} મેળવો. 7
7. (A) વ્યાખ્યા આપો : લાક્ષણિક મૂલ્ય અને લાક્ષણિક સદિશો 7
જો λ એ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_n$ નું લાક્ષણિક મૂલ્ય હોય તો દર્શાવો કે
(i) $\lambda + k$ એ $A + kI$, $k \in \mathbb{R}$ નું લાક્ષણિક મૂલ્ય છે.
(ii) λ^3 એ A^3 નું લાક્ષણિક મૂલ્ય છે.
- (B) સાબિત કરો કે સંહિતિ $x - 3y + z = 2$, $2x + y - z = 6$, $x + 2y + 2z = 2$ સુસંગત છે અને ઉકેલ મેળવો. 7
8. (A) કેલે-હેમીલ્ટન પ્રમેય લખો અને તેનું શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ માટે ચકાસણી કરો. 7
- (B) ચોરસ શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો મેળવો અને કોઈ એક લાક્ષણિક મૂલ્યને અનુરૂપલાક્ષણિક સદિશ શોધો. 7

વિભાગ - II

9. ગમે તે ચારના જવાબ આપો : 8
- (a) $y = e^{2x}$ નું n મું વિકલન મેળવો.
- (b) શ્રેણીની અભિસારીતા ચર્ચો : $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$.
- (c) શોધો : $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$
- (d) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & i-2 & i \\ 1-i & 3+i & 0 \end{bmatrix}$ હોય તો A^* મેળવો.
- (e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ નું લાક્ષણિક સમીકરણ મેળવો.
- (f) જો $\lambda = -1$ એ કક્ષા 2 વાળા ચોરસ શ્રેણિક A નું એકમાત્ર લાક્ષણિક મૂલ્ય છે તો $\det(A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

MD-118

March-2022

B.Sc., Sem.- I**101 : Mathematics****(Calculus and Matrix Algebra)****Time : 2 Hours]****[Max. Marks : 50**

- Instructions :** (1) All questions in Section – I carry equal marks.
 (2) Attempt any **THREE** questions in Section – I.
 (3) Question – 9 in Section – II is compulsory.

Section – I

1. (A) Write and prove Leibnitz's theorem. 7
 (B) If $y = \frac{x}{(x-1)(x+2)}$, then find y_n . 7
2. (A) State and prove De' Alembert ratio test for the infinite real positive series. 7
 (B) Define convergence of a series. Discuss the convergence of the following series :
 (i) $\sum \frac{3n+1}{2n+3}$ (ii) $\sum \frac{x^n}{n!}$ 7
3. (A) State and prove Lagrange's mean value theorem. 7
 (B) Expand $\cos x$ in terms of x . 7
4. (A) State L'Hospital's first theorem and find value of $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}$. 7
 (B) Verify Roll's mean value theorem for function $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $[0, 2]$. 7
5. (A) Define Symmetric and Skew-symmetric matrices. If A is a square matrix, then prove that $A + A^T$ is symmetric matrix and $A - A^T$ is skew-symmetric matrix. 7
 (B) Transform the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 12 & -1 \end{bmatrix}$ into the row reduced echelon form and find its rank. 7

6. (A) For a square matrix A of order n , prove that 7
 $A \cdot (\text{adj } A) = (\text{adj } A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$
- (B) Define inverse of a square matrix. Find A^{-1} for the matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. 7
7. (A) Define Eigen value and Eigen vector of a square matrix. 7
 If λ is an eigen value of a matrix $A = [a_{ij}]_n$, then show that
 (i) $\lambda + k$ is the eigen value of $A + kI$, for $k \in \mathbb{R}$.
 (ii) λ^3 is the eigen value of A^3 .
- (B) Prove that the equations $x - 3y + z = 2$, $2x + y - z = 6$, $x + 2y + 2z = 2$ are consistent, and then find its solution. 7
8. (A) State Cayley-Hamilton theorem. Verify it for matrix $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. 7
- (B) Find the eigen values and eigen vector corresponding to any one eigen value of the square matrix $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. 7

Section – II

9. Attempt any **FOUR** : 8
- (a) Find n^{th} derivative of $y = e^{2x}$.
- (b) Discuss convergence of sequence $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$.
- (c) Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$.
- (d) If $A = \begin{bmatrix} 1 & i-2 & i \\ 1-i & 3+i & 0 \end{bmatrix}$, then find A^* .
- (e) Find Characteristic equation of matrix $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
- (f) If $\lambda = -1$ is the only eigen value of matrix A of order 2, then $\det(A) = \underline{\hspace{2cm}}$.