

**KC-102**

March-2014

**F.Y.B.Sc. (Old Pattern)**  
**Mathematics, Paper-II**  
**(Geometry & Matrix Algebra)**

Time : 3 Hours]

[Max. Marks : 105

- સૂચના : (1) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ સાત પ્રશ્નો છે.  
**Instructions :** There are total **seven** questions.  
 (2) બધાજ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.  
**All questions are compulsory.**  
 (3) દરેક પ્રશ્નનાં ગુણ સરખા છે.  
**All questions carry equal marks.**

1. (a) ઉદાહરણ સહિત નીચેના શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો : 5  
 Define the following matrices with illustration :  
 (i) નિમ્ન-ત્રિકોણીય શ્રેણિક  
 Lower Triangular Matrix  
 (ii) વિ-હરમીશીયન શ્રેણિક  
 Skew Hermitian Matrix  
 (iii) વિકર્ણી શ્રેણિક  
 Diagonal Matrix

**અથવા/OR**

સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો. બતાવો કે ચોરસ શ્રેણિક  $A = [a_{ij}]_n$  માટે  $A + A^T$  સંમિત છે અને  $A - A^T$  વિસંમિત છે.  
 Define symmetric and skew-symmetric matrices. Prove that for square matrix  $A = [a_{ij}]_n$   $A + A^T$  is a symmetric and  $A - A^T$  is a skew-symmetric matrix.

- (b) શ્રેણિકના કોટિની વ્યાખ્યા આપો. 5

શ્રેણિક  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$  નાં કોટિ મેળવો.

Define rank of matrix. Find the rank of matrix.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

(c) ગમે તે એક ગણો :

5

Attempt any **one** :

(i) જો શ્રેણિક  $A = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -1+3i \\ -5 & -i & -4-2i \end{bmatrix}$  હોય તો  $A * A$  શોધો.

Find  $A * A$  for the matrix  $A = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -1+3i \\ -5 & -i & -4-2i \end{bmatrix}$ .

(ii) શ્રેણિક  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  હોય તો  $A^{-1}$  શોધો.

Find  $A^{-1}$ , for the matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

2. (a) જો  $\lambda$  એ સંમિત શ્રેણિક  $A = [a_{ij}]_n$  નું લાક્ષણિક મૂલ્ય હોય તો બતાવો કે

5

If  $\lambda$  is an eigen value of a symmetric matrix  $A = [a_{ij}]_n$  then show that

(i)  $\frac{1}{\lambda}$  એ  $\frac{1}{A}$  નું લાક્ષણિક મૂલ્ય છે.

$\frac{1}{\lambda}$  is the eigen value of  $\frac{1}{A}$

(ii)  $\frac{|A|}{\lambda}$  એ  $\text{adj } A$  નું લાક્ષણિક મૂલ્ય છે.

$\frac{|A|}{\lambda}$  is the eigen value of  $\text{adj } A$ .

**અથવા/OR**

યુગ્મમત  $n$ -સુરેખ સમીકરણ સંહિતના  $n$ -અચળો  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )ના ઉકેલ માટેની ક્રેમરની રીત સમજાવો.

Obtain the Cramer's rule to solve the system of  $n$  linear equations in  $n$  variables

$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

(b) ચોરસ શ્રેણિક માટે લાક્ષણિક મૂલ્ય અને લાક્ષણિક સદિશની વ્યાખ્યા આપો. શ્રેણિક  $A$  માટે

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  ની લાક્ષણિક મૂલ્ય અને લાક્ષણિક સદિશ મેળવો.

5

Define eigen value and eigen vector of square matrix. Find the eigen values and

corresponding eigen vectors of the matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

**અથવા/OR**

કલે-હેમીલ્ટનનું વિધાન લખો અને તેની ચકાસણી શ્રેણિક  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  કરી.  $A^{-1}$  મેળવો.

State the Caley-Hamilton's theorem and verify it for the matrix  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

and find  $A^{-1}$ .

(c) શ્રેણિક  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  નું લાક્ષણિક સમીકરણ મેળવો. 5

$A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I$  વડે મળતો શ્રેણિક મેળવો.

Obtain the characteristic equation of the matrix  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  and also find the

matrix represented by the expression  $A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I$

3. ગમે તે ત્રણ ગણો : 15

Attempt any **three** :

(i) બતાવો કે બહુપદી  $P_n(x)$  ને  $x - \alpha$  વડે ભાગતાં શેષ અચળ સંખ્યા  $P_n(\alpha)$  છે અને  $\alpha \neq \beta$  માટે

$(x - \alpha)(x - \beta)$  વડે ભાગતાં શેષ સુરેખ બહુપદી  $\frac{(x - \beta)P_n(\alpha) - (x - \alpha)P_n(\beta)}{\alpha - \beta}$  થાય.

Show that if a polynomial  $P_n(x)$  is divided by  $(x - \alpha)$  then the remainder is the constant  $P_n(\alpha)$  and for  $\alpha \neq \beta$  if  $P_n(x)$  is divided by  $(x - \alpha)(x - \beta)$  then its remainder

is the linear polynomial  $\frac{(x - \beta)P_n(\alpha) - (x - \alpha)P_n(\beta)}{\alpha - \beta}$ .

(ii) સમીકરણ  $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$  (જ્યાં  $a \neq 0, b, c, d \in \phi$ )ના ઉકેલ મેળવવા માટેની કાર્ડનની રીત સમજાવો.

Explain the Cardon's method for solving the equation  $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$  (where  $b, c, d \in \phi, a \neq 0$ ).

(iii) ફેરારીની રીતે  $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$  ઉકેલો.

Solve  $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$  by the Ferrari's method.

(iv) બહુપદી  $3x^4 - 2x^2 - x + 5 = 0$  ની દરેક શૂન્ય કરતાં 2 ઓછી કિંમતવાળી શૂન્યની ચતુર્થઘાત બહુપદી મેળવો.

Find the fourth degree polynomial that has all its zeroes decreased by 2 than those of polynomial  $3x^4 - 2x^2 - x + 5 = 0$

(v) સમીકરણ  $2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$  ના બે બીજનો તફાવત 3 છે. તો સમીકરણના બીજ શોધો.

The difference of two roots of the equation  $2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$  is 3. Find the roots of the equation.

4. (a)  $c(\rho, \alpha)$  કેન્દ્ર અને  $a$ -ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો. 5

Obtain the polar equation of the circle having centre  $c(\rho, \alpha)$  and radius  $a$ .

**અથવા/OR**

$A(r_1, \theta_1)$  અને  $B(r_2, \theta_2)$  બિંદુમાંથી પસાર થતા રેખાનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો.

Find the polar equation of a line passing through the points  $A(r_1, \theta_1)$  and  $B(r_2, \theta_2)$ .

- (b) ગમે તે બેના જવાબ આપો : 10

Attempt any **two** :

- (i) શાંકવ  $\frac{3}{r} - 5 \cos \theta = 2$  ના પ્રકાર જણાવો અને કાર્તેઝીયન સમીકરણ મેળવો.

Give the type of conic is represented by the equation  $\frac{3}{r} - 5 \cos \theta = 2$ , and obtain Cartesian equation.

- (ii)  $R^3$  માં કોઈ બિંદુ (A)ના ગોલીય યામ  $\left(3, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$  હોય તો એ બિન્દુના સિલિન્ડરીય યામ અને કાર્તેઝીયન યામ મેળવો.

If  $\left(3, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$  are spherical co-ordinates of the point A in  $R^3$ , then find Cartesian and cylindrical co-ordinates of the point A.

- (iii) જો સમાન કેન્દ્ર S માંથી પસાર થતી શાંકવની કોઈ બે નાભિજીવાઓ  $\overline{P'SP}$  અને  $\overline{Q'SQ}$  પરસ્પર લંબ હોય તો સાબિત કરો કે  $\frac{1}{SP \cdot SP'} + \frac{1}{SQ \cdot SQ'} = \text{અચળ}$ .

If  $\overline{P'SP}$  and  $\overline{Q'SQ}$  are two mutually perpendicular focal chords of a conic passing the same focus S then prove that  $\frac{1}{SP \cdot SP'} + \frac{1}{SQ \cdot SQ'} = \text{constant}$ .

5. (a) ગોલક  $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$  પરના બિંદુ  $A(\alpha, \beta, \gamma)$  આગળ સ્પર્શતલ અને અભિલંબનું સમીકરણ મેળવો. 5

Obtain the equation of the tangent and Normal plane to the sphere

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ , at a point  $A(\alpha, \beta, \gamma)$ .

**અથવા/OR**

સમતલ  $lx + my + nz = p$  ગોલક  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ને સ્પર્શે તે માટેનો પ્રતિબંધ અને સ્પર્શબિંદુના યામ મેળવો.

Obtain the condition that the plane  $lx + my + nz = p$  touches the sphere  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ . Also find co-ordinates of the point of their contact.

(b) ગમે તે બે ગણો :

10

Attempt any **two** :

(1) બે ગોલકો લંબચ્છેદી હોવા માટેની શરત તારવો. આ ઉપરથી સા. કરો કે ગોલકો

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 8y + 4z + 19 = 0 \text{ અને}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 6z + 41 = 0 \text{ લંબચ્છેદી છે.}$$

Obtain the condition that two spheres intersect each other orthogonally. Prove that two spheres

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 8y + 4z + 19 = 0 \text{ and}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 6z + 41 = 0 \text{ orthogonally.}$$

(2) જો સમતલ  $kx - y - 2z = 4$  એ ગોલક

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 1 = 0 \text{ ને સ્પર્શે તો } k \text{ ની કિંમત મેળવો.}$$

If the plane  $kx - y - 2z = 4$  will touch the sphere  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 1 = 0$  then find the value of  $k$ .

(3)  $R^3$  માં વર્તુળ  $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$ ,  $3x + 4y - 2z - 10 = 0$  માંથી પસાર થતા અને  $(2, -1, 1)$  બિંદુમાંથી પસાર થતા ગોલકનું સમીકરણ મેળવો.

In  $R^3$ , find the equation of the sphere passing through the circle  $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$ ,  $3x + 4y - 2z - 10 = 0$  and point  $(2, -1, 1)$ .

6. (a) સાબિત કરો કે શંકુનું શીર્ષ ઉદગમ બિંદુ હોય તો અને તો જ શંકુનું સમીકરણ સમપરીમાણી છે. 5

Prove that the vertex of the cone is at the origin if and only if the equation of the cone is homogeneous.

**અથવા/OR**

સમનળાકારની વ્યાખ્યા આપો.

જેના અક્ષ  $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$  હોય અને  $r$ -ત્રિજ્યાવાળા સમનળાકારનું સમીકરણ મેળવો.

Define right circular cylinder.

Obtain the equation of the right circular cylinder having axis  $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$

and radius equal to  $r$ .

(b) ગમે તે બેના જવાબ આપો :

10

Attempt any **two** :

- (1) સાબિત કરો કે સમીકરણ  $xy + yz + zx = 0$  સમશંકુ દર્શાવે છે. તેમના શીર્ષ, અક્ષનું સમીકરણ અને અર્ધ-શીર્ષકોણનું માપ મેળવો.

Prove that the equation  $xy + yz + zx = 0$  represents a right circular cone. Also find its vertex, semi-angle and the equation of the axis.

- (2)  $R^3$  માં જેનો આધાર વક્ર  $x_2^2 + 2x_3^2 = 1, x_1 - 3x_3 = 0$  અને સર્જકરેખા Z-અક્ષને સમાંતર નળાકારનું સમીકરણ મેળવો.

Find the equation of a cylinder in  $R^3$  whose generators are parallel to Z-axis and the guiding curve is  $x_2^2 + 2x_3^2 = 1, x_1 - 3x_3 = 0$

- (3) શિરોબિંદુ  $(\alpha, \beta, \gamma)$  અને આધાર વક્ર  $y^2 = 4ax, z = 0$  હોય એવા શંકુનું સમીકરણ મેળવો.

Obtain the equation of cone having vertex at  $(\alpha, \beta, \gamma)$  and guiding curves  $y^2 = 4ax, z = 0$ .

7. (a) સમતલ  $lx + my + nz = p$  એ કેન્દ્રીય શાંકવજ  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  સ્પર્શે તે માટેની શરત અને સ્પર્શબિંદુના યામ મેળવો. 5

Obtain the condition that the plane  $lx + my + nz = p$  touches the central conicoid  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  and also find point of their contact.

અથવા/OR

કેન્દ્રીય શાંકવજ  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  પરના  $p(\alpha, \beta, \gamma)$  બિંદુએ સ્પર્શતલ અને અભિલંબનું સમીકરણ મેળવો.

Obtain the equation of the tangent and normal plane at point  $p(\alpha, \beta, \gamma)$  to the central conicoid  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(b) ગમે તે બે ગણો :

10

Attempt any **two** :

- (1) સાબિત કરો કે કેન્દ્રીય શાંકવજને આપેલ બિંદુમાંથી વધુમાં વધુ છ અભિલંબો દોરી શકાય છે.

Prove that there can be drawn at most six normals from the given point to the central conicoid.

- (2) પરવલયજ  $3x^2 - 8y^2 = 24z$  ને સમતલ  $4x - 6y - z = 5$  ને સ્પર્શે તેમ બતાવો. સ્પર્શબિંદુના યામ મેળવો.

Prove that the plane  $4x - 6y - z = 5$ , touches the paraboloid  $3x^2 - 8y^2 = 24z$ . Also find the co-ordinates of the point of contact.

- (3) શંકવજ  $2x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$  અને સુરેખા  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-9}{4}$  નાં છેદબિંદુઓ શોધો.

Find the points of intersection of the conicoid  $2x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$  and the straight line  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-9}{4}$ .

---

