Seat No. : _______________

KB-102

March-2014

F.Y.B.Sc. (Annual Pattern)

Mathematics, Paper-I

(Calculus)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 105**

સૂચના : (1) પ્રશ્નપત્રમાં કુલ **સાત** પ્રશ્નો છે.
Instructions : There are total **seven** questions in question paper.
(2) દરેક પ્રશ્ન સમાન ગુણ ધરાવે છે.
Each question carry equal marks.

1. (a) લાયબ્નીઝનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.
State and prove Leibnitz's theorem.

અથવા/OR

જો $y = \cos(ax + b)$, $a, b \in R$, $a \neq 0$ હોય તો સાબિત કરો કે $y_n = a^n \cos\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right)$; $n \in N$

If $y = \cos(ax + b)$, $a, b \in R$, $a \neq 0$, then prove that $y_n = a^n \cos\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right)$, $n \in N$.

(b) ગમે તે **બે** ગણો :
Attempt any **two** :

(i) જો $y = \left(\frac{\log x}{x}\right)$ હોય તો y_n શોધો.
If $y = \left(\frac{\log x}{x}\right)$, then find y_n.

(ii) જો $x = \operatorname{cosec} 2\theta$, $y = \tan^m\theta$ હોય તો સાબિત કરો કે $(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n + 1)x\, y_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$
If $x = \operatorname{cosec} 2\theta$, $y = \tan^m\theta$, then prove that $(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n + 1)x\, y_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$

(iii) જો $f(x) = \tan x$, $x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in N$ હોય તો સાબિત કરો કે

$$f^n(0) - nc_2\, f^{n-2}(0) + nc_4\, f^{n-4}(0) - \ldots = \sin\frac{n\pi}{2}.$$

If $f(x) = \tan x$, $x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in N$, then prove that $f^n(0) - nc_2\, f^{n-2}(0) + nc_4\, f^{n-4}(0) - \ldots = \sin\frac{n\pi}{2}$.

2. (a) કોશીની બીજ કસોટી લખો અને સાબિત કરો.
State and prove Cauchy root test.

અથવા/OR

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ધન પદોની શ્રેઢી માટે $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = l$ છે. સાબિત કરો કે $0 < l < 1$ માટે શ્રેઢી અભિસારી અને $l > 1$ માટે શ્રેઢી અપસારી છે.

For an infinite series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ with positive terms $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = l$, prove that if $0 < l < 1$ then $\Sigma\, a_n$ is convergent and $l > 1$ then $\Sigma\, a_n$ is divergent.

(b) નીચેની શ્રેઢીઓનાં અભિસરણની ચર્ચા કરો : (ગમે તે **બે**)
Discuss the convergence of the following series : (any **two**)

(i) $\Sigma \frac{n!}{n^n}$

(ii) $\Sigma \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n^2}$

(iii) $\frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{5} + \dots\dots\dots\dots + \frac{x^n}{n+2} + \dots\dots\dots\dots$

3. (a) લાંગ્રાન્જનું મધ્યકમાન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.
State and prove Lagrange's Mean-value theorem.

અથવા/OR

મેક્લોરીનનું પ્રમેય લખો. તે પરથી $x \in R$ માટે e^x નું xની ઘાતમાં વિસ્તરણ કરો.
State Maclaurin's theorem, using it expand e^x, $x \in R$ in the powers of x.

(b) ગમે તે **બે** ગણો :
Attempt any **two** :

(i) જો $3a - 4b + 6c - 12d = 0$ હોય તો સાબિત કરો કે ત્રિઘાત સમીકરણ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$ નું એક બીજ -1 અને 0 ની વચ્ચે છે.
If $3a - 4b + 6c - 12d = 0$, then prove that one root of the cubic equation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$ lies between -1 and 0.

(ii) $\sqrt{x}$ નું $x - 4$ ના ચઢતા ઘાતમાં વિસ્તરણ કરો, $x \in R^+$
Expand $\sqrt{x}$ in the increasing power of $x - 4$, where $x \in R^+$.

(iii) જો $\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos^2 x}{a - b \operatorname{cosec} x} = 6$ હોય તો a અને bના મૂલ્યો શોધો.
If $\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos^2 x}{a - b \operatorname{cosec} x} = 6$, then find the value of a and b.

4. (a) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$, $n \in N$નું લઘુકરણ સૂત્ર મેળવો.
Derive reduction formula for $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$, $n \in N$.

(b) ગમે તે **બે** ગણો :

Attempt any **two** :

(i) ચક્રજ $x = a(\theta + \sin\theta)$ અને $y = a(1 - \cos\theta)$નાં એક ચાપની લંબાઈ શોધો.

Find the measure of one arc of the cycloid $x = a(\theta + \sin\theta)$; $y = a(1 - \cos\theta)$.

(ii) તારક $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ નું x-અક્ષની આસપાસ પરિભ્રમણ કરતાં રચાતાં ઘનનું ઘનફળ શોધો.

Find the volume of the solids generated by rotating area of the asteroid $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ about x-axis.

(iii) રજ્જૂવક્ર $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ ની $x = 0$ થી $x = a$ સુધીના ચાપને x-અક્ષ આસપાસ પરિભ્રમણ કરતાં પૃષ્ઠનું પૃષ્ઠફળ શોધો.

Find the surface area of the surface generated by revolving arc of the catenary $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ between the straight line $x = 0$ and $x = a$ about x-axis.

5. (a) ક્લેરોટનું વિકલ સમીકરણ લખો અને તેના ઉકેલ માટેની રીત સમજાવો.

Write down the Clairaut's differential equation and derive the method to solve it.

અથવા/OR

સાબિત કરો કે વિકલ સમીકરણ $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ યથાર્થ હોવાની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ છે.

Prove that $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ is necessary and sufficient condition for the differential equation $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ to be an exact.

(b) ગમે તે **બે** ઉકેલો :

Attempt any **two** :

(i) $x, \frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$

(ii) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$

(iii) $(2x + y - 3)dy = (x + 2y - 3)dx$

6. (a) પ્રચલિત સંકેતોમાં સાબિત કરો કે :

$\frac{1}{f(D)} e^{ax} V = e^{ax} \cdot \frac{1}{f(D + a)} \cdot V$; જ્યાં $f(D + a) \neq 0$ અને V એ ચલ x નું વિધેય છે.

In usual notation, prove that $\frac{1}{f(D)} e^{ax} V = e^{ax} \cdot \frac{1}{f(D + a)} \cdot V$, where $f(D + a) \neq 0$ and V is a function of x.

અથવા/OR

પ્રચલિત સંકેતોમાં સાબિત કરો કે $\frac{1}{f(D^2)} \cdot \sin ax = \frac{1}{f(-a^2)} \cdot \sin ax$; $f(-a^2) \neq 0$.

In usual notation, prove that $\frac{1}{f(D^2)} \cdot \sin ax = \frac{1}{f(-a^2)} \cdot \sin ax$, $f(-a^2) \neq 0$.

(b) ગમે તે **બે** ઉકેલો :
Solve any **two** :
(i) $(D^2 + 5D + 6)y = e^{2x}$
(ii) $(D^3 - D^2 - 6D)y = x^2 + 1$
(iii) $(D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1)y = 0$

7. ગમે તે **ત્રણ** ગણો :
Attempt any **three** :

(i) એક કણ અચળ પ્રવેગ a સાથે સુરેખા માં ગતિ કરે છે. સાબિત કરો કે $s = ut + \frac{1}{2}at^2$, $v = u + at$, $v^2 = u^2 + 2as$, જ્યાં s અને v અનુક્રમે t = 0 સેકન્ડે કણે કાપેલું અંતર અને પ્રાપ્ત કરેલ વેગ દર્શાવે છે. u પ્રારંભિક વેગ છે.

A particle travels along a st. line with constant acceleration a, prove that $s = ut + \frac{1}{2}at^2$, $v = u + at$, $v^2 = u^2 + 2as$, where s is the distance covered from the instant t = 0, u is the initial velocity and v is the final velocity.

(ii) વેગ અને પ્રવેગના અરીય અને અનુપ્રસ્થ સંઘટકો મેળવો.
Find the radial and transverse components of velocity and acceleration.

(iii) જો એક કણના ગતિમાર્ગનું સમીકરણ $r = a \tan \theta$ હોય અને તેના પ્રવેગની દિશા ઉગમબિંદુ તરફની હોય તો દર્શાવો કે પ્રવેગ $\frac{K^2}{r^3}\left[3 + \frac{2a^2}{r^2}\right]$ છે. જ્યાં $K = r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt}$.

The equation of the path of the particle is $r = a \tan \theta$ and its acceleration is towards the origin. Show that the acceleration is $\frac{K^2}{r^3}\left[3 + \frac{2a^2}{r^2}\right]$, where $K = r^2 \frac{d\theta}{dt}$.

(iv) ન્યૂટોનિયન યંત્રશાસ્ત્રનાં મૂળભૂત નિયમો લખો.
State Fundamental laws of Newtonian Mechanics.

(v) એક કણ ગતિમાર્ગ $r = ae^{\theta}$ ઉપર એની રીતે ગતિ કરે છે કે તેના પ્રવેગનો અરીય સંઘટક હંમેશા શૂન્ય થાય છે. સાબિત કરો કે $\frac{d\theta}{dt}$ અચળ છે. તેના વેગ અને પ્રવેગનાં માન r ના સમપ્રમાણમાં છે.

A particle moves on the curve $r = ae^{\theta}$ in such a way that the radial component of its acceleration is always zero. Prove that $\frac{d\theta}{dt}$ = constant and magnitude of its velocity and acceleration are directly proportional to r.