Seat No. : _______________

AW-102

May-2016

B.Sc., Sem.-II

CC-103 : Mathematics
(Differential Equations and Co-ordinate Geometry)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) **બધા** જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

(2) જમણી બાજુના અંક જે તે પ્રશ્ન/પેટા પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

(3) સંકેતો પ્રચલિત છે.

1. (a) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ ના ઉકેલ માટેની રીત સમજાવો.

જ્યાં P અને Q એ ચલ x ના વિધેયો છે.

$x\frac{dy}{dx} - y = 2x^3$ નો ઉકેલ પણ મેળવો. **7**

અથવા

વિકલ સમીકરણ $y = x\, f(p) + g(p)$ ના ઉકેલની રીત સમજાવો.

$p^2 - 4px + 3y = 0$ નો ઉકેલ પણ મેળવો. $\left(\text{જ્યાં } p = \frac{dy}{dx}\right)$.

(b) સમીકરણ ઉકેલો : **7**

(1) $\frac{dy}{dx} - xy = x^3y^2$

(2) $(2x + 6y - 5)\, dx + (6x - 3y + 4)\, dy = 0$

અથવા

સમીકરણ ઉકેલો :

(1) $p^2 - (x + 3y)\, p + 2y\,(x + y) = 0; \left(\text{જ્યાં } p = \frac{dy}{dx}\right)$.

(2) $p^2(x - 5) + (2x - y)p - 2y = 0; \left(\text{જ્યાં } p = \frac{dy}{dx}\right)$.

2. (a) જો $f(a) \neq 0$, હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax}$. **7**

$\frac{1}{(D^2 + 2D + 2)} e^{9x}$ નું સાદુંરૂપ આપો. $\left(\text{જ્યાં } D = \frac{d}{dx}\right)$

અથવા

જો $f(D + a) \neq 0$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{f(D)} e^{ax} V(x) = e^{ax} \frac{1}{f(D + a)} V(x)$.

$\frac{1}{(D - 4)} e^{4x} \cos(x)$ નું સાદું રૂપ આપો. $\left(\text{જ્યાં } D = \frac{d}{dx}\right)$

(b) સમીકરણ ઉકેલો : **7**

(1) $(D^4 - 2D^3 + 5D^2 - 8D + 4)\, y = 0$.

(2) $(D^2 + 9)\, y = \sin(x + 5) - \cos 3x$.

અથવા

સમીકરણ ઉકેલો :

(1) $(D + 1)^2 y = xe^{-x}$.

(2) $(X^2D^2 - 2XD + 2)\, y = X^3$.

3. (a) R^3 માં સમતલ $lx + my + nz = p$ ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ને સ્પર્શે તે માટેની શરત મેળવો. વળી સ્પર્શબિંદુના યામ પણ મેળવો. **7**

અથવા

R^3 માં $A(x_1, y_1, z_1)$ અને $B(x_2, y_2, z_2)$ વ્યાસાંત બિંદુઓવાળા ગોલકનું સમીકરણ મેળવો. R^3 માં $A(2, 3, -1)$ અને $B(-1, 4, -2)$ વ્યાસાંત બિંદુવાળા ગોલકનું સમીકરણ મેળવો.

(b) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો : **7**

(1) સાબિત કરો કે $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 8y + 4z + 19 = 0$ અને $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 6z + 41 = 0$ પરસ્પર લંબચ્છેદી ગોલકો છે.

(2) સાબિત કરો કે ગોલકો $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z + 8 = 0$ અને $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ પરસ્પર બહારથી સ્પર્શે છે.

અથવા

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) R^3 માં ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ અને રેખા $\bar{r} = (-8, -18, 9) + k\,(4, 7, -3)$ ના છેદબિંદુઓ મેળવો. (જ્યાં $k \in R$)

(2) જો સમતલ $kx + y - 2z = 9$ એ ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ને સ્પર્શે તો k ની કિંમત શોધો.

4. (a) R^2 માં જેનું કેન્દ્ર $C(\rho, \alpha)$ અને 'a' ત્રિજ્યા હોય તેવા વર્તુળનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો. જો ધ્રુવ વર્તુળનું કેન્દ્ર હોય તો વર્તુળનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો. **7**

અથવા

R^3 માં ત્રિજ્યા 3 અને અક્ષ $\bar{r} = (1, 1, 1) + k\,(2, 3, 1)$ હોય તેવા સમ નળાકારનું સમીકરણ મેળવો. (જ્યાં $k \in R$)

(b) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો : **7**

(1) સાબિત કરો કે સમીકરણ $x^2 + y^2 + z^2 - 16yz + 16zx - 16xy = 0$ સમશંકુ દર્શાવે છે. તેનો અક્ષ અને અર્ધ શીરઃકોણ મેળવો.

(2) R^2 માં બે બિંદુઓ $A(2, \pi)$ અને $B\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો.

અથવા

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) R^3 માં બિંદુ A ના ગોલીય યામ $\left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$ હોય તો તેના કાર્તેઝીય યામ અને સિલિન્ડરીય યામ શોધો.

(2) R^3 માં આધારવક્ર $x^2 + 2y^2 + 7z^2 = 5,\ 3x - 4y + z = 1$ માંથી પસાર થતા અને ઉગમબિંદુ શીર્ષવાળા શંકુનું સમીકરણ મેળવો.

5. નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો : (ગમે તે **સાત**) **14**

(1) વિકલ સમીકરણ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = \sin 5x$ ની કક્ષા અને પરિમાણ જણાવો.

(2) વિકલ સમીકરણ $yp = xp^2 + a$ નો સામાન્ય ઉકેલ મેળવો.
$\left(\text{જ્યાં } p = \frac{dy}{dx} \text{ અને a અચળ છે.}\right)$

(3) વિકલ સમીકરણ $(D^2 - 5D + 6)\,y = 0$ નો ઉકેલ મેળવો.

(4) $\frac{1}{(1 - D)} x^3$ નું સાદું રૂપ આપો.

(5) R^3 માં ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ પરના $(2, -2, 1)$ બિંદુએ સ્પર્શતલનું સમીકરણ મેળવો.

(6) R^3 માં કેન્દ્રિય શાંકવજ અને અકેન્દ્રિય શાંકવજોના પ્રમાણિત સમીકરણો લખો.

(7) પ્રચલિત સંકેતોમાં શાંકવ $\frac{8}{r} = 4 + 4 \cos \theta$ માટે e અને l ની કિંમતો મેળવો.

(8) વર્તુળ $r^2 - 4r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - 5 = 0$ નું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો.

(9) જેનો સામાન્ય ઉકેલ $y = m x$ હોય તેવું વિકલ સમીકરણ મેળવો. (જ્યાં m અચળાંક છે.)

Seat No. : _______________

AW-102

May-2016

B.Sc., Sem.-II

CC-103 : Mathematics
(Differential Equations and Co-ordinate Geometry)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) **All** questions are compulsory.
(2) Figure to the right side indicate full marks of the question/sub-question.
(3) Symbols are usual.

1. (a) Explain the method to solve a differential equation

$\frac{dy}{dx} + Py = Q$; Where P and Q are functions of x.

Also solve $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^3$. **7**

OR

Explain the method to solve a differential equation

$y = x\, f(p) + g(p)$.

Also solve $p^2 - 4px + 3y = 0$. $\left(\text{where } p = \frac{dy}{dx}\right)$.

(b) Solve the equations : **7**

(1) $\frac{dy}{dx} - xy = x^3y^2$

(2) $(2x + 6y - 5)\, dx + (6x - 3y + 4)\, dy = 0$

OR

Solve the equations :

(1) $p^2 - (x + 3y)\, p + 2y\,(x + y) = 0$; $\left(\text{where } p = \frac{dy}{dx}\right)$.

(2) $p^2(x - 5) + (2x - y)\, p - 2y = 0$; $\left(\text{where } p = \frac{dy}{dx}\right)$.

2. (a) If $f(a) \neq 0$, then prove that $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax}$. **7**

Also simplify $\frac{1}{(D^2 + 2D + 2)} e^{9x}$. $\left(\text{Where } D = \frac{d}{dx}\right)$

OR

If $f(D + a) \neq 0$, then prove that $\frac{1}{f(D)} e^{ax} V(x) = e^{ax} \frac{1}{f(D + a)} V(x)$.

Also simplify $\frac{1}{(D - 4)} e^{4x} \cos(x)$. $\left(\text{Where } D = \frac{d}{dx}\right)$

(b) Solve the equations : **7**

(1) $(D^4 - 2D^3 + 5D^2 - 8D + 4)\, y = 0$.

(2) $(D^2 + 9)\, y = \sin(x + 5) - \cos 3x$.

OR

Solve the equations :

(1) $(D + 1)^2\, y = xe^{-x}$.

(2) $(X^2D^2 - 2XD + 2)\, y = X^3$.

3. (a) Find the condition that the plane $lx + my + nz = p$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ in R^3. Also obtain the co-ordinates of the point of contact in R^3. **7**

OR

Find the equation of the sphere having extremities $A(x_1, y_1, z_1)$ and $B(x_2, y_2, z_2)$ of its diameter in R^3.

Find the equation of the sphere having extremities A(2, 3, –1) and B(–1, 4 –2) of its diameter in R^3.

(b) Give the answer : **7**

(1) Prove that $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 8y + 4z + 19 = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 6z + 41 = 0$ are orthogonal spheres.

(2) Prove that the spheres $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z + 8 = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ touch each other externally.

OR

Give the answer : **7**

(1) Find the points of intersection of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ and a line $\bar{r} = (-8, -18, 9) + k\,(4, 7, -3)$ in R^3. (Where $k \in R$)

(2) If the plane $kx + y - 2z = 9$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, then find the value of k.

4. (a) Obtain the polar equation of circle having centre at $C(\rho, \alpha)$ and radius 'a' in R^2. If the pole is the centre of the circle, then obtain it's polar equation. **7**

OR

Find the equation of right circular cylinder having radius 3 and axis $\bar{r} = (1, 1, 1) + k\,(2, 3, 1)$ in R^3. (Where $k \in R$).

(b) Give the answer :

(1) Prove that the equation $x^2 + y^2 + z^2 - 16yz + 16zx - 16xy = 0$ represents a right circular cone. Find it's axis and semi-vertical angle. **7**

(2) Find the polar equation of the straight line passing through two points $A(2, \pi)$ and $B\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ in R^2.

OR

Give the answer :

(1) If the Spherical co-ordinates of points A are $\left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$ in R^3, then find its Cartesian co-ordinates and cylindrical co-ordinates.

(2) Find the equation of the cone having a vertex at origin and passing through the guiding curve $x^2 + 2y^2 + 7z^2 = 5$, $3x - 4y + z = 1$ in R^3.

5. Give the answer in short : (any **seven**) **14**

(1) Write the order and degree of the differential equation

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = \sin 5x.$$

(2) Obtain the general solution of differential equation $yp = xp^2 + a$.

$\left(\text{Where a is constant and } p = \frac{dy}{dx}\right)$

(3) Obtain the solution of differential equation $(D^2 - 5D + 6)\, y = 0$.

(4) Simplify $\frac{1}{(1 - D)} x^3$.

(5) Find the equation (in R^3) of tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ at the point $(2, -2, 1)$ on it.

(6) Write the standard equations of 'Central Conicoid' and 'Non-Central Conicoid' in R^3.

(7) In usual notations, find the value of e and l for the Conic $\frac{8}{r} = 4 + 4 \cos \theta$.

(8) Find the radius and centre of a circle $r^2 - 4r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - 5 = 0$.

(9) Find a differential equation whose general solution is $y = mx$. (where m is constant)