Seat No. : _______________

JM-241

March-2013

Mathematics : Paper - IV

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 105**

સૂચના : (1) **બધા** જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

(2) જમણી બાજુ દર્શાવેલ અંક માર્ક્સ દર્શાવે છે.

1. (અ) પરિમાણ પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **8**

અથવા

સદિશ અવકાશના ઉપાવકાશની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે સદિશ અવકાશ Vના ગમે તે બે ઉપાવકાશોનો છેદગણ પણ Vનું ઉપાવકાશ છે. પણ શું Vના બે ઉપાવકાશોનો યોગગણ Vનું ઉપાવકાશ થાય ? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

(બ) ગમે તે **બે** લખો : **10**

(1) સાબિત કરો કે ગણ B = {(–1, 1, 1); (1, 1, –1); (1, –1, 1)} એ $\mathbb{R}^3$ નો આધાર છે. $\mathbb{R}^3$ ના સદિશ (x, y, z) ના ઉપરોક્ત આધાર B ને સાપેક્ષ યામ મેળવો.

(2) સાબિત કરો કે સાન્ત પરિમાણિય સદિશ અવકાશ Vના કોઈપણ બે આધારોમાં સદિશોની સંખ્યા સમાન હોય છે.

(3) $\mathbb{R}^3$ ના સુરેખ સ્વાયત્ત ગણ {(1, –1, 0)} ને તેના આધાર સુધી વિસ્તૃત કરો.

(ક) $\mathbb{R}^3$નો ઉપગણ $S = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ એ ઉપાવકાશ છે ? શા માટે ? **3**

2. (અ) કોટિ-શૂન્યાંક પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **8**

અથવા

સુરેખ પરિવર્તનની વ્યાખ્યા આપો. $T : \mathbb{R}^3 \to R$; $T(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ એ સુરેખ પરિવર્તન છે કે નહીં તે નક્કી કરો. જ્યાં α, β, γ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

(બ) ગમે તે **બે** લખો : **10**

(1) જો $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $T(x, y, z) = (x + y, x - z)$; $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ વડે વ્યાખ્યાયિત સુરેખ પરિવર્તન હોય તો પ્રમાણિત આધારની સાપેક્ષ T સાથે સંકળાયેલ શ્રેણિક શોધો.

(2) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$ વડે વ્યાખ્યાયિત સુરેખ પરિવર્તન માટે શૂન્યાંક-કોટિ પ્રમેય ચકાસો.

(3) સુરેખ પરિવર્તનના શૂન્યાવકાશની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે સુરેખ પરિવર્તન T એક-એક હોય તો અને તો જ $N(T) = \{\theta\}$.

(ક) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ એવું સુરેખ પરિવર્તન છે કે જેથી $T(3, 2) = (1, 5)$; $T(-4, 5) = (2, -3)$ તો $T(5, 5)$ શોધો. **3**

3. (અ) કોશી-શ્વાર્ત્સ અસમતા લખો અને સાબિત કરો. **8**

અથવા

સાબિત કરો કે અંતઃ ગુણન અવકાશમાં લંબ સદિશોનો ગણ સુરેખ સ્વાયત્ત છે.

(બ) ગમે તે **બે** લખો : **10**

(1) $\mathbb{R}^3$ ના આધાર $\{(1, 1, 1) ; (1, 0, -1) ; (0, 3, 4)\}$ માંથી ગ્રામ-સ્મિત લંબીકરણ પદ્ધતિ દ્વારા $\mathbb{R}^3$ નો લંબ એકમ આધાર મેળવો.

(2) સદિશના માનની વ્યાખ્યા આપો. જો x અને y અંતઃ ગુણન અવકાશ Vના બે સદિશો હોય તો સાબિત કરો કે

(i) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ અને

(ii) $\big| \| x \| - \| y \| \big| \leq \| x - y \|$

(3) $x = (x_1, y_1)$; $y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ માટે $< , >$ ની વ્યાખ્યા

$< x, y > = x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + 5y_1 y_2$ છે. સાબિત કરો કે

$< , >$ એ $\mathbb{R}^2$ ઉપરનું અંતઃગુણન છે.

(ક) લંબપૂરક ઉપાવકાશની વ્યાખ્યા આપો. અને સદિશ $X = (4, 5, 6)$ માટે એકમ સદિશ લખો. **3**

4. (અ) $A = (a_{ij}) \in M_n$ ના શ્રેણિકના નિશ્ચાયકની વ્યાખ્યા આપો. **8**

$A = (a_{ij}) \in M_n$ માટે સાબિત કરો કે

$$\det A = \sum_{f \in S_n} (\operatorname{sgn} f)\, a_{f(1)l} \cdots a_{f(n)n}$$

અથવા

જો $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ અને A એ વ્યસ્ત સંપન્ન હોય, તો સાબિત કરો કે $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ અને $\det(A^{-1}BA) = \det B$.

(બ) ગમે તે **બે** લખો : **10**

(1) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & 1 \end{bmatrix}$ તો det(A) મેળવો.

(2) ક્રેમરનો નિયમ લખો અને તેની મદદથી નીચેની સંહતી ઉકેલો :

$x + y + z = 6$; $2x - y + z = 3$; $x + 3y - z = 4$.

(3) ઘટકો $f, g \in S_7$; $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ અને

$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in S_7$ માટે fog ; f^{-1} અને sgn (fog) મેળવો.

(ક) જો $\det : V^n \to \mathbb{R}$ એ નિશ્વાયકતા અપેક્ષિત ગુણધર્મોનું પાલન કરતું હોય તો સાબિત કરો કે જ્યારે $i \neq j$ ત્યારે $\det(v_1, v_2, \ldots, v_n) = -\det(v_2, v_1, v_3, \ldots, v_n)$. **3**

5. (અ) કેલે-હેમિલ્ટનનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **8**

અથવા

સંમિત સુરેખ વિધેયની વ્યાખ્યા આપો. જો $T : V \to V$ સંમિત સુરેખ વિધેય હોય અને T ના ભિન્ન લાક્ષણિક મૂલ્ય λ_1, λ_2 ને અનુરૂપ લાક્ષણિક સદિશ x_1, x_2 હોય તો સાબિત કરો કે x_1, x_2 પરસ્પર લંબ છે.

(બ) ગમે તે **બે** લખો : **10**

(1) વર્ગાત્મક સ્વરૂપ $7x^2 - 52xy - 32y^2 = 180$ નું વિકર્ણીકરણ તેમજ ઓળખ મેળવો.

(2) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ માટે કેલે-હેમિલ્ટનનો પ્રમેય ચકાસો.

(3) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો અને તેમને સંગત Aના લાક્ષણિક સદિશ મેળવો.

(ક) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ નું લાક્ષણિક સમીકરણ મેળવો. **3**

Seat No. : _______________

JM-241

March-2013

Mathematics : Paper - IV

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 105**

Instructions : (1) **All** questions carry equal marks.

(2) Figures to the right indicate marks of questions.

1. (a) State and prove Dimension theorem. **8**

OR

Define subspace of a vector space. Prove that the intersection of any two subspaces of a vector space V is also a subspace of V. Is its union a subspace of V ? Justify your answer.

(b) Attempt any **two :** **10**

(1) Prove that the set B = {(–1, 1, 1) ; (1, 1, –1); (1, –1, 1)} is a basis for $\mathbb{R}^3$. Find the co-ordinates of the vector (x, y, z) with respect to the basis B.

(2) Prove that two basis of a finite dimensional vector space V have the same number of vectors.

(3) Extend the linearly independent subset {(1, –1, 0)} of $\mathbb{R}^3$ to the basis of $\mathbb{R}^3$.

(c) Is the subset $S = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ of $\mathbb{R}^3$ a subspace of $\mathbb{R}^3$? Why ? **3**

2. (a) State and prove the rank-nullity theorem. **8**

OR

Define a linear transformation. Determine whether a map $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $T(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ where α, β, γ are real constants is linear map or not ?

(b) Attempt any **two :** **10**

(1) Find the matrix relative to the standard bases associated with the linear map $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ defined as $T(x, y, z) = (x + y, x - z)$; $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(2) Verify the rank-nullity theorem for linear transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ defined by $T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$.

(3) Define Kernel of a linear transformation. Prove that a linear transformation T is one-one if and only if $N(T) = \{\theta\}$.

(c) Let $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be a linear transformation such that $T(3, 2) = (1, 5)$; $T(-4, 5) = (2, -3)$ then find $T(5, 5)$. **3**

3. (a) State and prove the Cauchy-Schwarz inequality. **8**

OR

Prove that any orthogonal set in an inner product space V is linearly independent.

(b) Attempt any **two :** **10**

(1) Apply Gram-Schmidt orthonormalization process to the basis $\{(1, 1, 1) ; (1, 0, -1) ; (0, 3, 4)\}$ to obtain an orthonormal basis of $\mathbb{R}^3$.

(2) Define the norm of a vector. If x and y are two vectors in inner product space V, then prove that

(i) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ and

(ii) $\big| \| x \| - \| y \| \big| \leq \| x - y \|$

(3) For $x = (x_1, y_1)$; $y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$; $< , >$ defined as

$<x, y> = x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + 5y_1y_2$ then show that

$< , >$ is an inner product on $\mathbb{R}^2$.

(c) Define orthogonal complement subspace and find unit vector for vector $x = (4, 5, 6)$. **3**

4. (a) Define determinant of a matrix $A = (a_{ij}) \in M_n$. **8**

For $A = (a_{ij}) \in M_n$; Prove that

$$\det A = \sum_{f \in S_n} (\operatorname{sgn} f)\, a_{f(1)l} \dots a_{f(n)n}$$

OR

If $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ and A is non-singular then prove that $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ and $\det(A^{-1}BA) = \det B$.

(b) Attempt any **two :** **10**

(1) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & 1 \end{bmatrix}$ then find det(A).

(2) State the Cramer's rule and solve the following system of equation $x + y + z = 6$; $2x - y + z = 3$; $x + 3y - z = 4$.

(3) For the element $f, g \in S_7$; $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ and

$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in S_7$ then obtain fog ; f^{-1} and sgn (foy).

(c) If $\det : V^n \to \mathbb{R}$ is a mapping satisfying expected properties of the determinant then prove that for $i \neq j$; $\det(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) = -\det(\nu_2, \nu_1, v_3, \dots, \nu_n)$. **3**

5. (a) State and prove Cayley-Hamilton theorem. **8**

OR

Define symmetric linear map. If $T : V \to V$ is symmetric linear map and x_1, x_2 are eigen vectors of T corresponding to the distinct eigen values λ_1, λ_2 respectively, then prove that x_1, x_2 are orthogonal to each other.

(b) Attempt any **two :** **10**

(1) Diagonalize and identify the quadric form $7x^2 - 52xy - 32y^2 = 180$.

(2) Verify the Cayley-Hamilton's theorem for the matrix $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$.

(3) Find the eigen values and corresponding eigen vectors of the matrix $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$.

(c) Find the characteristic equation for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. **3**