Seat No. : _______________

NE-101

November-2013

B.Sc. (Sem.-III) (CBCS)

Mathematics

CC-202 : Linear Algebra

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) **દરેક** પ્રશ્નના સરખા ગુણ છે.
Instructions : Each question carries equal marks.
(2) કુલ **પાંચ** પ્રશ્નો છે.
There are five questions.

1. કોઈપણ **ત્રણ**ના જવાબ આપો.
Answer any **three** :
(1) સદિશ અવકાશની વ્યાખ્યા આપો. કોઈપણ સદિશ અવકાશ V માં સાબિત કરો કે
Define vector space. In any vector space V, prove that
(a) $\alpha\overline{0} = \overline{0}$ દરેક સદિશ α માટે
$\alpha\overline{0} = \overline{0}$ for very scalar α,
(b) $0u = \overline{0}$ પ્રત્યેક $u \in V$ અને
$0u = \overline{0}$ for every $u \in V$ and
(c) $(-1)u = -u$ પ્રત્યેક $u \in V$
$(-1)u = -u$ for every $u \in V$.
(2) સદિશ અવકાશના ઉપગણની વિસ્તૃતિની વ્યાખ્યા આપો, તથા સાબિત કરો કે સદિશ અવકાશ V ના ઉપગણ S માટે [S] એ S ને સમાવતો નાનામાં નાનો ઉપાવકાશ છે. [જ્યાં [S] = ગણ S ની વિસ્તૃતિ]
Define span of subset of vector space. If S is a nonempty subset of a vector space V, then prove that [S] is the smallest subspace of V containing S.
(3) જો U અને W એ સદિશ અવકાશ Vના ઉપાવકાશો હોયતો સાબિત કરો કે U + W એ V નો ઉપાવકાશ છે તથા $U + W = [U \cup W]$.
If U and W are two subspaces of a vector space V, then prove that U + W is a subspace of V and $U + W = [U \cup W]$.
(4) સાબિત કરો કે R^n (= વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ક્રમયુક્ત n-ટુપલનો ગણ) એ સદિશોના સામાન્ય સરવાળા અને અદિશ ગુણાકાર હેઠળ સદિશ અવકાશ છે.
Prove that R^n (= set of all ordered n-tuples of real numbers) is a vector space under usual addition and scalar multiplication of vectors.
(5) ધારો કે L એ R^3 નો એવો ઉપગણ છે કે જેમાં $(x, -3x, 2x)$ પ્રકારના સદિશો છે. તો સાબિત કરો કે L એ R^3 નો ઉપાવકાશ છે.
Let L be the set of all vectors of the form $(x, -3x, 2x)$ in R^3. Then prove that L is subspace of R^3.

2. ગમે તે **ત્રણ**ના જવાબ આપો.

Answer any **three** :

(1) સદિશ અવકાશ V ના સુરેખ સ્વાયત્ત અને સુરેખ અવલંબી ઉપગણોની વ્યાખ્યા આપો. તથા સાબિત કરો કે (a) LI ઉપગણનો પ્રત્યેક ઉચિત ઉપગણ LI હોય છે અને (b) LD ઉપગણનો પ્રત્યેક અધિગણ પણ LD હોય છે. (જ્યાં LI = સુરેખ સ્વાયત્ત, LD = સુરેખ અવલંબી)

Define linear independent and linear dependent subset of vector space. Also in any vector space, prove that (a) if a set is LI then any subset of it is LI and (b) if a set is LD then any super set of it is also LD.

(2) સદિશ અવકાશ V ના આધારની વ્યાખ્યા આપો તથા સાબિત કરો કે જો સદિશ અવકાશ Vના આધારમાં n ઘટકો આવેલા હોય તો p સભ્યો ધરાવતો કોઈપણ ઉપગણ LD છે જો $p > n$.

Define basis of a vector space. Also prove that if V has basis of n elements, then every set of p vectors with $p > n$, is LD.

(3) સદિશ અવકાશ Vના પરિમાણની વ્યાખ્યા આપો તથા પરિમાણ પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

Define dimension of a vector space. State and prove dimension theorem.

(4) સાબિત કરો કે ગણ $\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 1, 1)\}$ એ R^3નો આધાર છે.

Prove that the set $\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 1, 1)\}$ is a basis for R^3.

(5) ગણ $B = \{(1, 0, 1, 0), (0, -1, 1, 0)\}$ ને R^4ના આદાર સુધી વિસ્તૃત કરો.

Expand subset $B = \{(1, 0, 1, 0), (0, -1, 1, 0)\}$ to a basis of R^4.

3. ગમે તે **ત્રણ**ના જવાબ આપો.

Answer any **three** :

(1) સુરેખ વિધેયની વ્યાખ્યા આપો. જો $T : R^3 \to R^2$ એ $T(x, y, z) = (x - y, x + z)$ વડે વ્યાખ્યાયિત હોય તો સાબિત કરો કે T સુરેખ વિધેય છે. તથા N(T), R(T), n(T) અને r(T) શોધો.

Define linear transformation. If $T : R^3 \to R^2$ is defined by $T(x, y, z) = (x - y, x + z)$ then prove that T is linear transformation, also find N(T), R(T), n(T) and r(T).

(2) જો $T : U \to V$ સુરેખ વિધેય હોય તો સાબિત કરો કે (a) $T(\bar{0}) = \bar{0}$, (b) $T(-u) = -T(u)$ અને (c) $T(\alpha_1 u_1 + \dots\dots\dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 Tu_1 + \dots\dots. + \alpha_n Tu_n$.

Let $T : U \to V$ be a linear map. Then prove that (a) $T(\bar{0}) = \bar{0}$, (b) $T(-u) = -T(u)$ and $T(\alpha_1 u_1 + \dots\dots\dots \alpha_n u_n) = \alpha_1 Tu_1 + \dots\dots. + \alpha_n Tu_n$.

(3) કોટયાંક-શૂન્યાંક પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

State and prove rank-nullity theorem.

(4) સાબિત કરો કે સુરેખ પરિવર્તન T ના પ્રદેશના આધાર પરની કિંમતો પરથી નક્કિ કરી શકાય છે.

Prove that a linear transformation T is completely determined by its values on the elements of basis.

(5) જો સુરેખ પરિવર્તન $T : R^4 \to R^3$ એ $T(e_1) = (1, 1, 1)$, $T(e_2) = (1, -1, 1)$, $T(e_3) = (1, 0, 0)$ અને $T(e_4) = (1, 0, 1)$ વડે વ્યાખ્યાયિત હોય તો T માટે કોટયાંક-શૂન્યાંક પ્રમેયની ચકાસણી કરો.
Let $T : R^4 \to R^3$ be a linear transformation defined by $T(e_1) = (1, 1, 1)$, $T(e_2) = (1, -1, 1)$, $T(e_3) = (1, 0, 0)$ and $T(e_4) = (1, 0, 1)$. Then verify rank nullity theorem for T.

4. કોઈપણ **બે**ના જવાબ આપો.
Answer any **two** :
(1) સાબિત કરો કે સદિશ અવકાશ $M_{m \times n}$ નું પરિમાણ mn છે.
Prove that the dimension of the vector space $M_{m \times n}$ is mn.
(2) જો સુરેખ પરિવર્તન $T : R^3 \to R^3$ એ
$T(x, y, z) = (x - y + z, 2x + 3y - \frac{1}{2}z, x + y - 2z)$ વડે વ્યાખ્યાયિત હોય અને જો $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B_2 = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (-1, 0, 1)\}$ હોય તો $(T : B_1, B_2)$ મેળવો.
Let a linear transformation $T : R^3 \to R^3$ is defined by
$T(x, y, z) = (x - y + z, 2x + 3y - \frac{1}{2}z, x + y - 2z)$. If $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ and
$B_2 = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (-1, 0, 1)\}$ then find $(T : B_1, B_2)$.
(3) શ્રેણિક $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ નો વિસ્તાર ગણ, શૂન્યાવકાશ શોધો તથા કોટયાંક-શૂન્યાંક પણ મેળવો.
Find the range, kernel, rank and nullity of the matrix
$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5. ટૂંકમાં જવાબ લખો.
Answer the following short questions :
(1) જો $V = \{\bar{0}\}$ તો V એ સામાન્ય ક્રિયાઓ હેઠળ સદિશ અવકાશ છે ?
If $V = \{\bar{0}\}$ then V is vector space under usual operations.
(2) $\{v\}$ એ LD $\Leftrightarrow v = \bar{0}$. સમજાવો.
$\{v\}$ is LD iff $v = \bar{0}$. Explain
(3) $\{v_1, v_2\}$ એ LD $\Leftrightarrow$ તેમાનું એક બીજાનું સુરેખ-સંયોજન છે. સમજાવો.
$\{v_1, v_2\}$ are LD iff one of them is linear combination of other. Explain.
(4) સાબિત કરો કે $(3, 7) \notin [\{1, 2\}, \{2, 4\}]$
Prove that $(3, 7) \notin [\{1, 2\}, \{2, 4\}]$.

(5) R^2 માં A = {(2, 3)} અને B = {(t, 2t) : t ∈ R} તો A + B શોધો. તે શું છે ?
In R^2 if A = {(2, 3)} and B = {(t, 2t) : t ∈ R} find A + B. What is it ?

(6) જો A = {(x, y, z) : xy = 0} તો A એ R^3 નો ઉપાવકાશ છે. કેમ ?
If A = {(x, y, z) : xy = 0} then A is subspace of R^3. Why ?

(7) જો C = {(x, y, z) : x + y + z ≥ 0} તો C એ R^3 નો ઉપાવકાશ છે ? કેમ ?
If C = {(x, y, z) : x + y + z ≥ 0} then C is subspace of R^3. Why ?

(8) જો S = {$x - 1$, $x + 1$, $x^2 + 2$} તો S એ P_3 નો આધાર છે. કેમ ?
If S = {$x - 1$, $x + 1$, $x^2 + 2$} is basis of P_3. Why ?

(9) આધાર ક્યારેય શૂન્ય સદિશ ધરાવતો નથી. કેમ ?
A basis can never include the zero vector. Why ?

(10) જો T : R → R^3 એ T(x) = (x, x^2, x^3) તો T સુરેખ વિધેય છે ?
T : R → R^3 defined by T(x) = (x, x^2, x^3). T is linear.

(11) જો T : $R^2 \to R^3$ એ T(x, y) = (x, x + y, y) તો r(T) શોધો.
T : $R^2 \to R^3$ defined by T(x, y) = (x, x + y, y). Find r(T).

(12) જો T : $R^2 \to R^2$ એ T(x, y) = (x, – y) તો T^{-1} શોધો.
T : $R^2 \to R^2$ defined by T(x, y) = (x, – y). Find T^{-1}.

(13) સુરેખ પરિવર્તનને અનુરૂપ શ્રેણિક વિષે સમજાવો.
Explain matric associated with linear map.

(14) શ્રેણિકને અનુરૂપ સુરેખ પરિવર્તન વિષે સમજાવો.
Explain linear map associated with matrix.