

ND-101

November-2013

B.Sc. (Sem.-III)**MAT-201 : Mathematics (CC-201)****(Advance Calculus – I)****Time : 3 Hours]****[Max. Marks : 70**

સૂચના : બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

Instruction : All questions are compulsory.

1. (a) ગમે તે બે ગણો :

Attempt any **two** :(1) વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી, કિંમત મેળવો : $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (xy - 3x + 4)$ Using definition Evaluate : $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (xy - 3x + 4)$ (2) સાબિત કરો : જો $\phi(x)$ એ $(a, \phi(a)) = (a, b)$ બિંદુએ સતત હોય અને $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l \in \mathbb{R}$ હોય, તો $\lim_{x \rightarrow a} f(x, \phi(x))$ અસ્તિત્વ ધરાવે અને તે l ની બરાબર થાય.Prove : If $\phi(x)$ is continuous function at point $(a, \phi(a)) = (a, b)$ & $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l \in \mathbb{R}$, then $\lim_{x \rightarrow a} f(x, \phi(x))$ exist and equal to l .(3) જો $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} ; & x^2 + y^2 \neq 0 \\ = 0 & ; x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ માટે $f(x, y)$ ની $(0, 0)$ બિંદુએ સાતત્ય ચર્ચો.Discuss the continuity of function $f(x, y)$ at point $(0, 0)$ if $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} ; & x^2 + y^2 \neq 0 \\ = 0 & ; x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

(b) ગમે તે એક ગણો :

Attempt any **one** :(1) કિંમત મેળવો : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y}$.Evaluate : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y}$.(2) જ્યારે $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ હોય ત્યારે $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ની પુનરાવર્તિત લક્ષ મેળવો.Evaluate the iterated limits of $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ as $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

2. (a) યંગ્સનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.
State and prove Young's theorem.

અથવા/OR

સાબિત કરો : જો વિવૃત ઉપગણ $E \subset \mathbb{R}^2$ માટે $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ વ્યાખ્યાયિત હોય અને $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ અસ્તિત્વ ધરાવે અને બિંદુ $(x, y) \in E$ આગળ સતત હોય તો વિધેય f એ $(x, y) \in E$ આગળ વિકલનીય હોય છે.

Prove : If for open set, $E \subset \mathbb{R}^2$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ is defined and if $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ exist and continuous at point $(x, y) \in E$, then function f is differentiable at point $(x, y) \in E$.

- (b) ગમે તે બે ગણો :

Attempt any **two** :

$$(1) \left. \begin{aligned} f(x, y) &= \frac{xy^2}{x^2 + y^4} ; x \neq 0, y \neq 0 \\ &= 0 ; x = 0, y = 0 \end{aligned} \right\} \text{વિધેયનું } (0, 0) \text{ બિંદુ આગળ } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ ની} \\ \text{દિશામાં દિક વિકલન શોધો.}$$

Find the directional derivative of function

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= \frac{xy^2}{x^2 + y^4} ; x \neq 0, y \neq 0 \\ &= 0 ; x = 0, y = 0 \end{aligned} \right\} \text{at point } (0, 0) \text{ in direction of } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

- (2) જો $U = \log(x^2 + y^2)$ હોય તો સાબિત કરો કે U એ x અને y નું સ્વરિત વિધેય છે.

If $U = \log(x^2 + y^2)$ then prove that U is harmonic function of x and y .

$$(3) \left. \begin{aligned} f(x, y) &= \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) ; y \neq 0 \\ &= 0 ; y = 0 \end{aligned} \right\} \text{વિધેય માટે } f_{xx}, f_{yy} \text{ અને } f_{xy} \text{ શોધો.}$$

$$\text{Find } f_{xx}, f_{yy} \text{ and } f_{xy} \text{ for function } f(x, y) = \left. \begin{aligned} \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) ; y \neq 0 \\ = 0 ; y = 0 \end{aligned} \right\}$$

3. (a) સમપરીમાણીય વિધેય માટેનું ઓઈલરનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.
State and prove Euler's theorem on homogeneous function.

અથવા/OR

સાબિત કરો : જો f એ વિવૃતપ્રદેશ $E \subset \mathbb{R}^2$ પર વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય હોય અને $(a, b) \in E$ બિંદુએ વિકલનીય જેને (a, b) બિંદુએ સ્થાનનીય સ્થિર મૂલ્ય હોય તો $f_x(a, b) = 0$, $f_y(a, b) = 0$ થાય.

Prove : If a real valued function f , defined on an open domain $E \subset \mathbb{R}^2$, and is differentiable at point $(a, b) \in E$, has an extreme value at (a, b) then $f_x(a, b) = 0$, $f_y(a, b) = 0$

(b) ગમે તે બે ગણો :

Attempt any **two** :

(1) $f(x, y) = x^2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ વિધેય માટે ઓઈલર પ્રમેયનું સમર્થન કરો.

Verify Euler's theorem for the function $f(x, y) = x^2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$.

(2) જો $U = U\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right)$ હોય તો બતાવો કે $x^2 \frac{\partial U}{\partial x} + y^2 \frac{\partial U}{\partial y} + z^3 \frac{\partial U}{\partial z} = 0$ થાય.

If $U = U\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right)$ then show that $x^2 \frac{\partial U}{\partial x} + y^2 \frac{\partial U}{\partial y} + z^3 \frac{\partial U}{\partial z} = 0$.

(3) વિધેય $f(x, y) = 2(x-y)^2 - x^4 - y^4$ માટે સ્થાનનીય સ્થિરમૂલ્યો શોધો.

Find the extreme values of the function $f(x, y) = 2(x-y)^2 - x^4 - y^4$.

4. (a) વક્ર $x = f(t)$, $y = g(t)$ માટે વક્રતા ત્રિજ્યા શોધો અને વર્તુળ $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ની વક્રતા ત્રિજ્યા શોધો.

Find the radius of curvature of a curve $x = f(t)$, $y = g(t)$. Also find the radius of curvature of a circle $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

અથવા/OR

વક્ર $f(x, y) = 0$ પરના દિક્ષિંદુના અસ્તિત્વ માટેની આવશ્યક શરત શોધો.

Derive a necessary condition for the existence of a double point on the curve $f(x, y) = 0$.

(b) ગમે તે બે ગણો :

Attempt any **two** :

(1) $f(x, y) = e^{ax} \cos by$ ના x અને y ની ઘાતમાં વિસ્તરણના પ્રથમ ત્રણ પદો શોધો.

Find first three terms in the expansion of $f(x, y) = e^{ax} \cos by$ in powers of x and y .

(2) વક્ર $x^3 + 3x^2 - y^2 + 3x - 2y = 0$ પરના દિક્ષિંદુ શોધો અને તેના પ્રકાર સમજાવો.

Find the double point on the curve $x^3 + 3x^2 - y^2 + 3x - 2y = 0$ and explain its type.

(3) ધ્રુવિય વક્ર $r = a(1 + \cos \theta)$ ની વક્રતા ત્રિજ્યા શોધો.

Find the radius of curvature of polar curve $r = a(1 + \cos \theta)$

5. (a) ટૂંકમાં જવાબ આપો : (દરેકના બે ગુણ)

Answer in short (each of **two** marks) :

(1) $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}$, $x - y \neq 0$ } તો $xf_x + yf_y$ શોધો.
 $= 0$, $x - y = 0$ }

$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}$, $x - y \neq 0$ } then find $xf_x + yf_y$.
 $= 0$, $x - y = 0$ }

(2) જો $U = e^{\frac{xy}{z}}$ તો $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ શોધો.

If $U = e^{\frac{xy}{z}}$ then find $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$.

(3) xy નું સ્થાનનીય સ્થિર મૂલ્ય $x + y = 1$ શરત નીચે શોધો.

Find the extreme value of xy under condition $x + y = 1$

(b) ટૂંકમાં જવાબ આપો :

Answer in short (each of **one** mark) :

(1) જોડાણગણની વ્યાખ્યા આપો.

Define Connected Set.

(2) વિધેય $f(x, y)$ માટે (a, b) બિંદુ આગળ પુનરાવર્તિત લક્ષની વ્યાખ્યા આપો.

Define Iterated limit for function $f(x, y)$ at point (a, b)

(3) $f(x, y) = \begin{cases} xy + 3, & (x, y) \neq (1, 2) \\ 0, & (x, y) = (1, 2) \end{cases}$ માટે $(1, 2)$ બિંદુએ સાતત્ય ચર્ચો.

Discuss the continuity of $f(x, y) = \begin{cases} xy + 3, & (x, y) \neq (1, 2) \\ 0, & (x, y) = (1, 2) \end{cases}$ at point $(1, 2)$

(4) વક્ર $ax + by + c = 0$ માટે વક્રતા શું થાય ?

What is the curvature of curve $ax + by + c = 0$?

(5) દિક્ વિકલન $D_u f(x)$ શોધવાનું સૂત્ર લખો.

Write the formula to find directional derivative $D_u f(x)$.

(6) સમપરિમાણીય વિધેયની વ્યાખ્યા આપો.

Define Homogeneous Function.

(7) જો આપેલ દિક્ બિંદુ નિશ્ચિત હોય તો r, s અને t વચ્ચે શું સંબંધ હોય ?

If the double point is CUSP, then what is relation among r, s & t ?

(8) વિધેય $f(x, y)$ ની મેક્લોરીન શ્રેણી લખો.

Write MaClaurin series of function $f(x, y)$.