

Seat No. : _____

DH-105

December-2013

B.Sc. Sem.-I

CC-3 : Mathematics (Paper-101)

Time : 3 Hours]

[Max. Marks : 70

સૂચના : (1) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ પાંચ પ્રશ્નો છે.

Instructions : There are **five** questions.

(2) પાંચમો પ્રશ્ન (હેતુલક્ષી) objective છે.

Fifth question is objective.

1. (a) જો $y = e^{ax} \cdot \sin(bx + c)$ જ્યાં $a, b, c \in \mathbb{R}$ હોય તો સાબિત કરો કે $y_n = (a^2 + b^2)^{n/2} \cdot e^{ax} \cdot$

$$\sin\left(bx + c + n \tan^{-1} \frac{b}{a}\right) \text{ જ્યાં } \tan \theta = \frac{b}{a}. \quad 7$$

If $y = e^{ax} \cdot \sin(bx + c)$ $a, b, c \in \mathbb{R}$, then prove that $y_n = (a^2 + b^2)^{n/2} \cdot e^{ax} \cdot$

$$\sin\left(bx + c + n \tan^{-1} \frac{b}{a}\right) \text{ where } \tan \theta = \frac{b}{a}.$$

અથવા/OR

જો $y = (ax + b)^m$; $ax + b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$; b અચલ સંખ્યા છે તો $n \in \mathbb{N}$ માટે y_n શોધો.

If $y = (ax + b)^m$; $ax + b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ and b is constants then find out y_n for $n \in \mathbb{N}$.

(b) દ'એલ્બર્ટની ગુણોત્તર કસોટી લખો અને સાબિત કરો. 7

State and prove De' Alembert Ratio Test.

અથવા/OR

નીચે આપેલ શ્રેણી માટે અભિસારીતા ચર્ચો :

Discuss the convergence for the following series :

(i) $\frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{3.4} + \frac{x^3}{4.5} + \dots$

(ii) $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} + \dots + \frac{x^n}{n^2 + 1} + \dots$

2. (a) કોશીનું મધ્યકમાન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7
State and prove Cauchy's mean value theorem.

અથવા/OR

લા'પીટલનો બીજો નિયમ લખો અને સાબિત કરો.

State and prove L'Hospital's second rule.

- (b) મેક્લોરીનનું પ્રમેય લખો અને તેનો ઉપયોગ કરી 'sin x' નું xના ઘાતમાં વિસ્તરણ મેળવો. 7
State the Maclaurin's theorem. Using this obtain 'sin x' in the powers of x.

અથવા/OR

સાબિત કરો :

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = 1 ; x > 0$

(ii) $\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1}x < x$ અને તે પરથી $\pi \in \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, 3\sqrt{3}\right)$ દર્શાવો.

Prove that :

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = 1 ; x > 0$

(ii) $\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1}x < x$ and hence show that $\pi \in \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, 3\sqrt{3}\right)$.

3. (a) વિસંમિત અને વિ-હરમિશીયન શ્રેણિકની વ્યાખ્યાઓ આપો. 3

જો A અને B એક જ કક્ષાના સંમિત શ્રેણિકો હોય, તો સાબિત કરો કે $AB - BA$ વિસંમિત શ્રેણિક છે તથા જો A અને B એક જ કક્ષાના હરમિશીયન શ્રેણિકો હોય, તો સાબિત કરો કે $AB - BA$ એ વિ-હરમિશીયન શ્રેણિક છે. 4

Define Skew symmetric Matrix and Skew-Hermitian matrix.

If A and B are symmetric matrices of the same order, then prove that $AB - BA$ is a skew-symmetric matrix. Also prove that $AB - BA$ is a skew - Hermitian, if A and B are Hermitian matrices of the same order.

અથવા/OR

વ્યાખ્યા આપો : પરાવર્ત શ્રેણિક અને વિકર્ણ શ્રેણિક. 3

જો A એ $m \times n$ પ્રકારનો શ્રેણિક તથા B એ $n \times p$ પ્રકારનો શ્રેણિક હોય તો સાબિત કરો $(AB)^T = B^T A^T$. 4

Define Transpose of a matrix and Diagonal matrix.

Prove that $(AB)^T = B^T A^T$ for matrix A of order $m \times n$ and matrix B of order $n \times p$.

- (b) વ્યાખ્યા આપો : અનુબદ્ધ શ્રેણિક અને અનુબદ્ધ પરિવર્ત શ્રેણિક 7

શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1+i & -2i \\ 3-i & 4+i \\ 1 & 3-2i \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ માટે સાબિત કરો $A^* = \overline{(A^T)}$.

Define : Conjugate matrix and conjugate transpose matrix. For given matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -2i \\ 3-i & 4+i \\ 1 & 3-2i \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad \text{prove that } A^* = \overline{(A^T)}.$$

અથવા/OR

$$\text{જો } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{હોય, તો } A^{-1} \text{ શોધો.}$$

$$\text{Find } A^{-1} \text{ of matrix } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

4. (a) જો λ એ વ્યસ્ત સંપન્ન શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_n$ નું લાક્ષણિક મૂલ્ય હોય, તો બતાવો કે 7

(i) λ^{-1} એ A^{-1} નું લાક્ષણિક મૂલ્ય છે.

(ii) $\frac{|A|}{\lambda}$ એ $\text{adj } A$ નું લાક્ષણિક મૂલ્ય છે.

If λ is an eigen value of matrix $A = [a_{ij}]_n$ then show that

(i) λ^{-1} is the eigen value of A^{-1} .

(ii) $\frac{|A|}{\lambda}$ is the eigen value of $\text{adj } A$.

અથવા/OR

શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો અને લાક્ષણિક સદિશો શોધો.

Find Eigen value and Eigen vectors of the given matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$ માટે કેલે-હેમીલ્ટન પ્રમેય ચકાસો. તે પરથી A^{-1} મેળવો. 7

Verify Caley-Hamilton theorem for the given matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$. Also

using this theorem find A^{-1} .

અથવા/OR

કેમરના નિયમથી નીચે આપેલ સમીકરણ સંહિતનો ઉકેલ મેળવો :

$$x + y + z = 9, 2x + 5y + 7z = 52, 2x + y - z = 0.$$

Solve the following equations by Cramer's rule :

$$x + y + z = 9, 2x + 5y + 7z = 52, 2x + y - z = 0.$$

5. નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો :

14

Answer the following questions in short :

(1) જો $y = 5^{2x-1}$ હોય તો y_n જણાવો.

If $y = 5^{2x-1}$, then what is y_n ?

(2) જો $y = (ax + b)^m$, $ax + b \in \mathbb{R}$ અને $a \neq 0$, b એચલ સંખ્યા છે તો $n = m$ અને $n > m$ માટે y_n જણાવો.

If $y = (ax + b)^m$, $ax + b \in \mathbb{R}$ and $a \neq 0$, b are constants then what is y_n for $n = m$ and $n > m$?

(3) p ની કયા મૂલ્ય માટે શ્રેઢી $\sum \frac{1}{n^p}$ અભિસારી અને અપસારી છે.

For what value of p ; $\sum \frac{1}{n^p}$ is convergent and divergent.

(4) એકાન્તર શ્રેઢી અભિસારી ક્યારે કહેવાય ?

When alternative series is convergent ?

(5) અંતરાલ $[a, b]$ માં વ્યાખ્યાયિત વિધેય 'f' ક્યારે ચુસ્ત વધતું વિધેય કહેવાય ?

Let function 'f', defined in the interval $[a, b]$. When you say that it is strictly increasing ?

(6) લાગ્રાન્જના મધ્યકમાન પ્રમેયનાં અન્ય સ્વરૂપો જણાવો.

Show that other forms of Lagrange's mean value theorem.

(7) અનિશ્ચિત સ્વરૂપ એટલે શું ?

What do you mean by Indeterminant form ?

(8) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ તો AB કયો શ્રેણિક મળશે ?

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, then which type of matrix AB ?

(9) ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A + A^*$ હરમિશીયન છે, દર્શાવો.

Let A be a square matrix. Then show that $A + A^*$ is Hermitian.

(10) જો શ્રેણિક A સંમિત હોય તો $A + A^T$ અને $A - A^T$ શું થાય ?

If A is symmetric matrix then what about $A + A^T$ and $A - A^T$?

(11) વ્યાખ્યા આપો : સહઅવયવજ શ્રેણિક

Define Adjoint Matrix.

(12) વ્યાખ્યા આપો : સુસંગત સંહતિ અને અસંગત સંહતિ

Define : Consistent and Inconsistent system.

(13) $\text{adj } A \cdot A =$ _____ ખાલી જગ્યા પૂરો.

Fill in the blanks : $\text{adj } A \cdot A =$ _____.

(14) શ્રેણિક A નું લાક્ષણિક સમીકરણ કોને કહેવાય ?

What is characteristic equation of the matrix A ?