Seat No. : _______________

DE-119

December-2013

B.Sc. (Sem.-V) (CBCS)

305 : Mathematics (Elective)

(Discrete Mathematics)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) કુલ **ચાર** પ્રશ્નો છે. **તમામ** પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.
Instructions : There are **four** questions. **All** questions are compulsory.
(2) જમણી બાજુના અંક પ્રશ્નના કુલ ગુણ દર્શાવે છે.
Figures to the right indicate full marks for the question.

1. (a) વ્યાખ્યા આપો : સંબંધ, પોસેટ, જાલિકા. એવા પોસેટનું ઉદાહરણ આપો કે જે જાલિકા ન હોય. **8**
Define : relation, poset, lattice. Give an example with proper justification of a poset which is not a lattice.

અથવા/OR

જાલિકા $(L, \leq)$ માટે $a \leq b \Leftrightarrow a * b = a \Leftrightarrow a \oplus b = b$ સાબિત કરો.

For a lattice $(L, \leq)$ prove that $a \leq b \Leftrightarrow a * b = a \Leftrightarrow a \oplus b = b$.

(b) જાલિકા $(L, \leq)$ માટે સાબિત કરો :

Prove the following for a lattice $(L, \leq)$:

(i) $\forall a, b \in L \Rightarrow a * b = b * a$. **5**

(ii) $\forall a, b, c \in L \Rightarrow a * (b * c) = (a * b) * c$. **5**

અથવા/OR

જાલિકા $(L, \leq)$ માટે સાબિત કરો :

Prove the following for a lattice $(L, \leq)$:

(i) $\forall a, b \in L \Rightarrow a * (a \oplus b) = a$.

(ii) $\forall a, b, c \in L \Rightarrow a * (b \oplus c) \geq (a * b) \oplus (a * c)$.

2. (a) ઉદાહરણ સહિત સમજાવો : બૈજિક રીતે જાલિકા, સબલેટાઈસ, લેટાઇસ હોમોમોરફીઝમ. **8**
Define with illustrations: Lattice as an algebraic system. Sublattice, lattice homomorphism.

અથવા/OR

બુલીય બીજગણિત માટે સાબિત કરો : $a \leq b \Leftrightarrow a * b' = 0 \Leftrightarrow a' \oplus b = 1 \Leftrightarrow b' \leq a'$.

For a Boolean algebra prove : $a \leq b \Leftrightarrow a * b' = 0 \Leftrightarrow a' \oplus b = 1 \Leftrightarrow b' \leq a'$.

(b) (i) બુલીય બીજગણિત માટે દ'મોર્ગનનો કોઈ એક નિયમ લખો અને સાબિત કરો. **5**

State and prove one of the De'moragn's laws of Boolean algebra.

(ii) લેટાઈસ $(L, \leq)$ માટે સાબિત કરો : $a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c), \forall a, b, c \in L$ $\Rightarrow$, $a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * (a \oplus c)\ \forall a, b, c \in L$. **5**

For a lattice $(L, \leq)$ prove: $\forall a, b, c \in L$, $a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c) \Rightarrow \forall a, b, c \in L$, $a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * (a \oplus c)$.

અથવા/OR

(i) $n = 10, 12, 15, 16$ માટે (S_n, D) ના હેઝ ડાયેગ્રામ દોરો.

Draw the Hasse-Diagram of (S_n, D) for $n = 10, 12, 15, 16$.

(ii) $n = 10, 12, 15, 16$ માટે (S_n, D) ના બધાં જ એટમ શોધો.

Find all the atoms of (S_n, D) for $n = 10, 12, 15, 16$.

3. (a) ઉદાહરણ સહિત વ્યાખ્યા આપો : બુલીય પદ, બે બુલીય પદની સામ્યતા, મીનટર્મ. **8**

Define with illustration : Boolean expression, equivalence of two Boolean expressions, minterm.

અથવા/OR

કોઈક $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ માટે જો m_i અને m_j બે ભિન્ન મીનટર્મ હોય તો $m_i * m_j = 0$ સાબિત કરો.

If m_i and m_j are two distinct minterms for some $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ then prove that $m_i * m_j = 0$.

(b) (i) $\alpha(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_3$ ને ગુણાકારોના સરવાળા તરીકે મૂળભૂત રીતે (SOD) રજૂ કરો. **5**

Convert $\alpha(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_3$ as sum of products canonical forms.

(ii) $\alpha(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_3$ ને સરવાળાઓના ગુણાકાર તરીકે મૂળભૂત રીતે (POS) રજુ કરો. **5**

Convert $\alpha(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_3$ as product of sum canonical forms.

અથવા/OR

(i) સ્ટોનનું રજુઆતનું પ્રમેયનું વિધાન લખો. શું $X = \{a, b\}$ માટે $(P(X), \cap, \cup, ^c, \phi, X)$ અને (S_6, D) એકરૂપ બુલીય બીજગણિત છે ? સમજાવો.

State the Stone's Representation theorem. Does $(P(X), \cap, \cup, ^c, \phi, X)$ isomorphic to (S_6, D) where $X = \{a, b\}$? Justify your answer.

(ii) જો a અને b એ બુલીય બીજગણિતના બે ભિન્ન મેક્ષટર્મ હોય તો $a \oplus b = 1$ સાબિત કરો.

If a and b are two distinct maxterms of a Boolean algebra then prove that $a \oplus b = 1$.

4. ટૂંકમાં જવાબ આપો : **16**

Answer in short :

(i) સ્વવાચક સબંધની વ્યાખ્યા આપો.

Define reflexive relation.

(ii) પ્રતિસંમિત સબંધની વ્યાખ્યા આપો.

Define anti-symmetric relation.

(iii) (S_4, D) નો હેઝ ડાયેગ્રામ દોરો.

Draw the Hasse-diagram of (S_4, D).

(iv) (S_9, D) નો હેઝ ડાયેગ્રામ દોરો.

Draw the Hasse-diagram of (S_9, D)

(v) શું (S_6, D) એ બુલીય બીજગણિત છે ?

Is (S_6, D) a Boolean Algebra ?

(vi) શું (S_9, D) એ બુલીય બીજગણિત છે ?

Is (S_9, D) a Boolean Algebra ?

(vii) શું (S_2, D) એ બુલીય બીજગણિત છે ?

Is (S_2, D) a Boolean Algebra ?

(viii) (S_6, D) નો હેઝ ડાયેગ્રામ દોરો.

Draw the Hasse-diagram of (S_6, D).

Seat No. : _______________

DE-119

December-2013

B.Sc. (Sem. V) (CBCS)

305 : Mathematics (Elective) (Number Theory)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions (1) **All** questions are compulsory.
(2) **All** questions carry equal marks.

1. (a) State and prove division algorithm for integers.
   (b) Evaluate (306, –657) and [306, –657].
   (c) If $p \geq q \geq 5$ and p and q are primes then prove that $24/p^2 - q^2$.

   OR

   Solve : $18x + 5y = 48$ in $\mathbb{Z}$.

2. (a) In usual notations prove that congruence relation is an equivalence relation.
   (b) Prove that any two Reduced Residue System have same number of elements.
   (c) Solve : $17x \equiv 9 \pmod{276}$

   OR

   If 792 divides the integer 13*x*y45z then find the digits *x*, y and z.

3. (a) State and derive Fermat's theorem.
   (b) Prove that $18! \equiv -1 \pmod{437}$.
   (c) For any prime 'p'; prove that $p/a^p + (p-1)!\, a$.

   OR

   For a prime 'p'; prove that $1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + (p-1)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

4. Answer the following **four** questions :
   (1) Solve in $\mathbb{N}$: $172x + 20y = 1000$.
   (2) Find the remainder when $111^{333} + 333^{111}$ is divisible by 7.
   (3) Find the smallest positive integer which leaves remainder 2, 3, 2 when divided by 3, 5, 7 respectively.
   (4) State only Wilson's theorem and Euler's theorem.