Seat No. : ______________

TA-127

April-2013

B.Sc. (Sem.-IV)

Mathematics : (205)

(Abstract Algebra-I)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) **તમામ** પ્રશ્નો ફરજિયાત છે તથા તેનો ગુણભાર **14** છે.
(2) સર્વત્ર સંકેતો પ્રચલિત છે.
(3) જમણી તરફના અંક જે તે પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્નનો ગુણભાર દર્શાવે છે.

1. (અ) સામ્ય સંબંધની વ્યાખ્યા આપો તથા દર્શાવો કે ગણ $A = Z \times \{Z - \{0\}\}$ પર જો $ad = bc$, તો $(a, b)S(c, d)$ વડે વ્યાખ્યાયિત સંબંધ S એ સામ્ય સંબંધ છે. **7**

અથવા

સમૂહની વ્યાખ્યા આપો તથા સાબિત કરો કે પ્રત્યેક સમૂહ $(G, *)$ ને અનન્ય એકમ ઘટક હોય છે.

(બ) સાબિત કરો કે જો સમૂહ G સમક્રમી સમૂહ હોય, તો અને તો જ તમામ $a, b \in G$ માટે $(ab)^2 = a^2b^2$ થાય. **7**

અથવા

જો તમામ $a, b \in G = R \sim \{-1\}$ માટે $*$ એ $a * b = a + b + ab$ વડે વ્યાખ્યાયિત ક્રિયા હોય, તો દર્શાવો કે $*$ એ G પરની દ્વિક્રિયા છે તથા $(G, *)$ એ સમૂહ છે.

2. (અ) સાબિત કરો કે સમૂહ G ના કોઈપણ બે ઉપસમૂહ H અને K માટે $H \cap K$ પણ G નું ઉપસમૂહ હોય છે. **7**

અથવા

દર્શાવો કે જ્યારે H એ G નું ઉપસમૂહ હોય, ત્યારે $x \in G$ માટે $x^{-1} Hx = \{x^{-1} hx / h \in H\}$ પણ G નું ઉપસમૂહ હોય છે.

(બ) જ્ઞાત સમૂહ G ના ઉપસમૂહ H માટે લાગ્રાન્જનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

અથવા

સમૂહો (i) $(Z_4, +_4)$ તથા (ii) ક્લેઈન-4 સમૂહ V_4 માટેની લેટીસ આકૃતિઓ દોરો.

3. (અ) ક્રમચયની વ્યાખ્યા આપો. $S = \{1, 2, 3\}$ પરના તમામ ક્રમચયોની યાદી બનાવો તથા સમૂહ S_3 નું સમૂહ કોષ્ટક તૈયાર કરો. વળી ટૂંકમાં જણાવો કે S_3 એ સમક્રમી સમૂહ છે કે નહિ. **7**

અથવા

નિયત ઉપસમૂહની વ્યાખ્યા આપો તથા સાબિત કરો કે જો H એ સમૂહ G નું નિયત ઉપસમૂહ હોય, તો અને તો જ પ્રત્યેક $a \in G$ માટે $aHa^{-1} \subset H$ થાય.

(બ) જો $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 & 12 & 3 & 10 & 8 & 11 & 1 \end{pmatrix} \in S_{12}$ હોય, તો f એ યુગ્મ ક્રમચય છે કે અયુગ્મ ક્રમચય તે નક્કી કરો. વળી તેની કક્ષા 0(f) પણ શોધો. **7**

અથવા

એવા અસમક્રમી સમૂહનું ઉદાહરણ આપો કે જેના તમામ ઉપસમૂહો નિયત હોય.

4. (અ) સમૂહની એકરૂપતા વ્યાખ્યાયિત કરો. વળી સાબિત કરો કે સમૂહની એકરૂપતાનો સંબંધ એ સામ્ય સંબંધ હોય છે. **7**

અથવા

જો H એ સમૂહ G નું નિયત ઉપસમૂહ હોય, તો દર્શાવો કે $x \in G$ માટે $\gamma(x) = H_x$ વડે વ્યાખ્યાયિત વિધેય $\gamma : G \rightarrow G/H$ એ વ્યાપ્ત સમરૂપતા છે.

(બ) જો H એ સમૂહ G નું ઉપસમૂહ હોય તથા $\phi : (G, o) \rightarrow (G', *)$ એ સમરૂપતા હોય, તો સાબિત કરો કે $\phi(H)$ એ G' નું ઉપસમૂહ છે. **7**

અથવા

સાબિત કરો કે સમાન કક્ષાના કોઈપણ બે જ્ઞાત સક્રિય સમૂહો એકરૂપ હોય છે.

5. નીચેના પૈકી કોઈપણ **સાત**ના જવાબ ટૂંકમાં આપો : **14**

(અ) સંમિત તથા પરંપરિત સંબંધની વ્યાખ્યા આપો.

(બ) સંગઠિત તથા સમક્રમી દ્વિક્રિયાની વ્યાખ્યા આપો.

(ક) સંમિત સમૂહ S_n તેમજ એકાંતર સમૂહ A_n ની વ્યાખ્યા આપો.

(ડ) ચક્ર તથા ફેરબદલીની વ્યાખ્યા આપો.

(ઇ) ઉપસમૂહ H ના દક્ષિણ સહગણ તેમજ તેના G માંના ક્રમિતની વ્યાખ્યા આપો.

(ઈ) નિયત ઉપસમૂહ તથા ભાગાકારીય ઉપસમૂહની વ્યાખ્યા આપો.

(ઉ) સમૂહની સમરૂપતા તથા તેના ગર્ભની વ્યાખ્યા આપો.

(ઊ) સમૂહની સમરૂપતાનું પ્રથમ પ્રમાણભૂત પ્રમેય વર્ણવો.

(ઋ) કેલેના પ્રમેયનું વિધાન લખો.

Seat No. : _______________

TA-127

April-2013

B.Sc. (Sem.-IV)

Mathematics : (205)

(Abstract Algebra-I)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) **All** the questions are compulsory and carry **14** marks.
(2) Notations are usual, everywhere.
(3) Figures to the right indicate marks of the question/sub-question.

1. (a) Define an equivalence relation and show that the relation S defined by (a, b)S(c, d) if ad = bc on the set $A = Z \times \{Z - \{0\}\}$ is an equivalence relation. **7**

OR

Define a group and prove that every group $(G, *)$ has a unique group identity.

(b) Prove that a Group G is commutative if and only if $(ab)^2 = a^2b^2$, for all $a, b \in G$. **7**

OR

If $*$ is an operation defined as $a * b = a + b + ab$ for all $a, b \in G = R \sim \{-1\}$, then show that $*$ is a binary operation and $(G, *)$ is a group.

2. (a) Prove that $H \cap K$ is a subgroup of G for any two subgroups H and K of a group G. **7**

OR

Show that $x^{-1} Hx = \{x^{-1} hx / h \in H\}$ is a subgroup of G if $x \in G$ and H is a subgroup of G.

(b) State and prove the Lagrange's theorem for a subgroup H of a finite group G. **7**

OR

Draw a Lattice Diagrams for the groups (i) $(Z_4, +_4)$ and (ii) Klein 4-group V_4.

3. (a) Define a permutation. List all permutations on S = {1, 2, 3} and prepare the group table for S_3. Also answer in short whether S_3 is a commutative group or not. **7**

OR

Define a normal subgroup and prove that H is a normal subgroup of a group G if and only if $aHa^{-1} \subset H$ for each $a \in G$.

(b) If $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 & 12 & 3 & 10 & 8 & 11 & 1 \end{pmatrix} \in S_{12}$, then determine whether f is even or odd. Also find its order. **7**

OR

Give an example of a non-commutative group, each of whose subgroup is normal.

4\. (a) Define an isomorphism of groups. Also prove that the relation of group isomorphism is an equivalent relation. **7**

OR

If H is a normal subgroup of G, then show that the map $\gamma : G \to G/H$ defined as $\gamma(x) = H_x$ for $x \in G$ is an onto homomorphism.

(b) If H is a subgroup of G and if $\phi : (G, o) \to (G', *)$ is a group homomorphism, then prove that $\phi(H)$ is a subgroup of G'. **7**

OR

Prove that any two finite cyclic groups of the same order are isomorphic groups.

5\. Answer any **seven** of the followings in short : **14**

(a) Define symmetric and transitive relations.

(b) Define an associative and a commutative binary operation.

(c) Define a symmetric group S_n and an alternative group A_n.

(d) Define a cycle and a transportation.

(e) Define the right coset of a subgroup H and the index of a subgroup H in a group G.

(f) Define a normal subgroup and the quotient group.

(g) Define a group homomorphism and its kernel.

(h) State the first fundamental theorem of the group homomorphism.

(i) State the Caley's theorem.