Seat No. : _______________

XA-101

March-2013

S.Y. B.Sc.

Mathematics (Paper – VA)

(Numerical Analysis and Boolean Algebra)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) **બધા** જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.
(2) પ્રત્યેક પ્રશ્નમાં (e) ભાગ ટૂંકા પ્રશ્નોનો ફરજિયાત છે.
(3) પ્રત્યેક પ્રશ્નમાં (a), (b), (c) અને (d) માંથી ગમે તે **બે** ના જવાબ આપો.
(4) પ્રત્યેક પ્રશ્નના ગુણ **14** છે.

1. (a) વ્યાખ્યા આપો : સાપેક્ષ ત્રુટિ અને સાપેક્ષ પ્રતિશત ત્રુટિ. $f(x) = x^4 + 5x$ માટે $x = 1.8$ આગળ $f(x)$ની ગણતરીમાં સાપેક્ષ પ્રતિશત ત્રુટિ મેળવો. જ્યાં x ની ગણતરીમાં 0.101 ત્રુટિ આપેલ છે.

   (b) સાબિત કરો : $\Delta^{n+1} f(x_0) \approx h^{n+1} f^{n+1}(x_0)$ અને બતાવો કે $f(4) = f(3) + \Delta f(2) + \Delta^2 f(1) + \Delta^3 f(1)$.

   (c) $11x^3 - 7x^2 - 4x + 9$ને ક્રમગુણિત સંકેત લિપિ (Factorial notation)માં દર્શાવો તથા તેનાં તફાવતો પણ આજ સ્વરૂપમાં દર્શાવો, અંતરાલોનો તફાવત 1 એકમ લો.

   (d) તફાવત કલનનું મૂળભૂત પ્રમેય લખી અને સાબિત કરો.

   (e) (i) $h = 1$ માટે $\Delta x(2x - 3)$ની કિંમત મેળવો.

   (ii) સાબિત કરો : $\Delta\nabla = \Delta - \nabla$

2. (a) ગૉસનું અગ્ર અંતર્વેશન સૂત્ર $G_1(x)$ તારવો.

   (b) વિધેય $f(x) = 3x^{[3]} - 7x + 2$ માટે $f(2, 0, -1, 1)$ મેળવો.

   (c) આપેલ કોઠા પરથી યોગ્ય અંતર્વેશન સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને f(1.37) મેળવો :

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
$f(x)$	2.015	2.410	2.921	3.641	4.197

   (d) સાબિત કરો : સુરેખ પરિવર્તન હેઠળ લાગ્રાંજીય વિધેયોના સ્વરૂપ અકબંધ (બદલાતા નથી) રહે છે.

   (e) (i) જે બિંદુઓના x-યામના તફાવત બદલાતાં હોય તેવાં બિંદુઓમાંથી પસાર થતી બહુપદી xમાં મેળવવા કયા સૂત્રનો (રીતનો) ઉપયોગ કરી શકાય ?

   (ii) અંતર્વેશન રીતોના નામ આપો કે જે xનાં અસમાન અંતરાલો માટે વપરાય છે.

3. (a) ગૉસ-લિજેન્ડરનું વ્યાપક ક્ષેત્રફળનું (ક્વૉડ્રેચર) સંખ્યાત્મક સંકલન માટેનું સૂત્ર મેળવો.

   (b) $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$; જ્યાં n = 12 ની ગણતરી સિમ્પસનના એક-તૃત્યાંશ સૂત્રની મદદથી કરો.

(c) પ્રચલિત સંકેતોમાં સૂત્રો તારવો :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots\ldots\right] y_0 \text{ અને}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \ldots\ldots\right] y_0$$

(d) આપેલ કોઠા પરથી f'(1) અને f"(1) ની ગણતરી કરો :

x	1	2	3	4	5	6
f(*x*)	1	3	7	13	21	31

(e) (i) વર્ણવો : સંખ્યાત્મક વિકલન

(ii) સંખ્યાત્મક સંકલનની કોઈપણ બે રીતોના નામ આપો.

4. (a) સમીકરણ $f(x) = 0$ નું એક અંદાજિત બીજ મેળવવા માટેની મિથ્યા-સ્થાનની રીત વર્ણવો.

(b) $\sqrt[3]{N}$ અને $\frac{1}{N}$ ની ગણતરી માટે વ્યાપક પરંપરીત સૂત્ર તારવો તથા $\sqrt[3]{45.64}$ અને $\frac{1}{12.07}$ ગણો.

(c) યૂઈલરની વિકસિત રીતનો ઉપયોગ કરી, h = 0.01 લઈ $\frac{dy}{dx} = y + x^2$ જ્યાં y(0) = 1 માટે y(0.02) ની ગણતરી દશાંશનાં ત્રણ ચોક્કસ સ્થાન સુધી કરો.

(d) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = xy$; y(0.3) = 1.1 પરથી રંગા-કુત્તાની રીતે y(0.6)ની ગણતરી દશાંશના 5-સ્થાન સુધી કરો, જ્યાં h = 0.3.

(e) (i) બીજગણિતીય સમીકરણનું એક બીજ મેળવવાની કોઈપણ બે રીતોના નામ આપો.

(ii) એક કક્ષાનાં વિકલ સમીકરણનાં સંખ્યાત્મક ઉકેલની બે રીતોના નામ આપો.

5. (a) જાલિકા $<L, *, \oplus>$ ખંડીય ક્રમ $\leq$ માટે બતાવો કે $a \leq b \Leftrightarrow a * b = a \Leftrightarrow a \oplus b = b$; $\forall$ a, b $\in$ L.

(b) વ્યાખ્યા આપો : ખંડીય ક્રમિક ગણ (poset) સંબંધ R એ L પર aRb $\Leftrightarrow$ a * b = a ; a, b $\in$ L વડે વ્યાખ્યાયિત હોય તો સાબિત કરો કે R એ L પર ખંડીય ક્રમિક સંબંધ છે.

(c) બતાવો કે $\langle S_{30}, D\rangle$ એ બુલીય બીજગણિત છે તથા પ્રત્યેક ઘટકનાં પૂરક ઘટક લખો.

(d) બુલીય સ્વરૂપ $x_1 \oplus x_2'$ નો ગુણાકારોનાં સરવાળા તરીકે 3-ચલોમાં દર્શાવો.

(e) (i) $\langle S_{90}, D\rangle$ ની હેઝ આકૃતિ દોરો.

(ii) બુલીય બીજગણિતમાં ડી'-મોર્ગનનો નિયમ લખો.

Seat No. : _______________

XA-101

March-2013

S.Y. B.Sc.

Mathematics (Paper – VA)

(Numerical Analysis and Boolean Algebra)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) **All** the questions are compulsory.

(2) In each question, (e) is of short questions and is compulsory.

(3) Attempt any **two** from (a), (b), (c) and (d) in each question.

(4) Each question is of **14** marks.

1. (a) Define : Relative error and Relative Percentage error. Compute relative percentage error in $f(x)$ at $x = 1.8$ if the error in $x = 0.101$, where $f(x) = x^4 + 5x$.

   (b) Prove that $\Delta^{n+1} f(x_0) \approx h^{n+1} f^{n+1}(x_0)$ and show that $f(4) = f(3) + \Delta f(2) + \Delta^2 f(1) + \Delta^3 f(1)$.

   (c) Express $11x^3 - 7x^2 - 4x + 9$ in factorial notation, hence, obtain its differences in the factorial notation, the interval of differencing being unity.

   (d) State and prove the fundamental theorem of the difference calculus.

   (e) (i) If h = 1 then find the value of $\Delta x(2x - 3)$.

   (ii) Prove that $\Delta\nabla = \Delta - \nabla$

2. (a) Derive Gauss forward formula $G_1(x)$.

   (b) Evaluate f(2, 0, –1, 1) from the function $f(x) = 3x^{[3]} - 7x + 2$.

   (c) Use suitable interpolation formula to compute f(1.37) from the data :

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
$f(x)$	2.015	2.410	2.921	3.641	4.197

   (d) Prove : The form of Lagrangean functions remain invariant under linear transformation.

   (e) (i) Which formula is applicable to find the polynomial in x passing through the points, x-coordinate is unequispaced ?

   (ii) Give the names of interpolation methods for unequispaced arguments.

3. (a) Drive Gauss-Legendre general qudrature formula for the Numerical Integration.

   (b) Use Simpson's one-third rule to compute $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ taking n = 12.

(c) In usual notations derive the formulae :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_0} = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + ...\right]y_0 \ \&$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x = x_0} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \ ....\right]y_0$$

(d) Compute f'(1) and f''(1) from the given data table :

x	1	2	3	4	5	6
f(*x*)	1	3	7	13	21	31

(e) (i) Explain : Numerical Differentiation.

(ii) State names of any two Numerical Integration methods.

4. (a) Explain : False position method to approximate one real root of the given equation $f(x) = 0$.

(b) Derive general iterative formulae to compute $\sqrt[3]{N}$ and $\frac{1}{N}$, hence compute $\sqrt[3]{45.64}$ and $\frac{1}{12.07}$.

(c) Use Euler's modified method to compute y(0.02), correct to 3-decimal places, taking step length h = 0.01 from the differential equation $\frac{dy}{dx} = y + x^2$ when y(0) = 1.

(d) Compute y(0.6), by Runge-Kutta method from the differential equation $\frac{dy}{dx} = xy$; y(0.3) = 1.1 taking h = 0.3, correct to 5-decimal places.

(e) (i) Give the name of any two methods to compute one root of Algebraic equation.

(ii) Give the name of any two methods to compute the numerical solution of ordinary differential equation of first order.

5. (a) In the lattice $<L, *, \oplus>$ with partial ordering $\leq$ show that

$$a \leq b \Leftrightarrow a * b = a \Leftrightarrow a \oplus b = b \text{ for every } \forall\, a, b \in L.$$

(b) Define partially ordered set. Define a relation R on L as follows :

$aRb \Leftrightarrow a * b = a$; $a, b \in L$. Prove that R is a partial order relation on L.

(c) Show that $\langle S_{30}, D\rangle$ is a Boolean algebra, also write the complement of each of its element.

(d) Express the Boolean expression $x_1 \oplus x_2'$ as the sum of products canonical form in 3-variables.

(e) (i) Draw Hasse diagram of the lattice $\langle S_{90}, D\rangle$. Where D is the relation 'divides'.

(ii) In a Boolean algebra state De'Morgan's law.

Seat No. : _______________

XA-101

March-2013

S.Y. B.Sc.

Mathematics (Paper – VA)

(Numerical Analysis Through Computers)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) Each question is compulsory.

(2) **All** questions carry equal marks.

(3) Use of scientific calculator is allowed but not programmable.

1. (a) Write an algorithm and a program to find n Fibonacci Numbers. **6**

OR

Write an algorithm and a program to count and to find the sum of all the integers between 1 to 500, which are divisible by 7.

(b) Write an algorithm and a program to sort the given n positive integers in to descending order. **6**

OR

Write a program to display :

(i) A sum of first n positive integers without using formula n(n + 1)/2.

(ii) To find a factorial of given integer n.

(c) State whether the following statements are true or false with reason : **2**

(1) The purpose of the header file <stdio.h> is to use the standard mathematical functions.

(2) Every line in a C program must end with a semicolon.

2. (a) (i) Obtain relation between difference operator Δ and $D\left(=\frac{d}{dx}\right)$ of differential calculus.

(ii) Prove that $\Delta \cdot \nabla = \Delta - \nabla$. **6**

OR

Prove that $\Delta^n x^{(n)} = n!\, h^n$.

(b) Express the polynomial in factorial (pseudo power) notation : **6**

$p(x) = 11x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x - 15$

OR

Find the missing entries of the following table :

x	1	2	3	4	5	6
f(*x*)	4	——	14	22	——	44

(c) Give answer of the following short questions : **2**

(1) Define : Relative Error.

(2) Define : Percentage Error.

3. (a) Attempt any **two** : **12**

(1) State and prove Stirling's interpolation formula.

(2) State and prove Newton's divided difference interpolation formula.

(3) Using an inverse interpolation formula find a real root of the equation $x^2 - \sin x = 0$.

(b) Give answer of the following short questions : **2**

(1) Write Newton Gregory forward interpolation formula.

(2) If p(0) = 1, p(1) = 0, p(2) = 1, p(3) = 10 then form forward difference table.

4. (a) State and prove Euler-maclaurin summation formula. **6**

OR

State and prove Simpson's one-third rule.

(b) Find f '(2) and f "(2) using appropriate interpolation formula. **6**

x	–2	–1	0	1	2
f(*x*)	31	5	1	1	11

OR

Evaluate $\int_0^1 \sqrt{1 - x^3}\, dx$ by using Trapezoidal rule taking six equal intervals correct upto two decimal places.

(c) Give answer of the following short questions : **2**

5. Answer any **three** : **14**

(a) State the Newton Raphson's formula to obtain real root of an equation. Using this find the iterative formulae to find $\sqrt{N}$ and $\frac{1}{\sqrt{N}}$ for a positive real number N.

(b) Discuss the Picard's method to find the numerical solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ with the initial condition $y(x_0) = y_0$.

(c) Using bisection method find a real root of equation $x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ correct to two decimal digits in the interval (–1, 0).

(d) Given $\frac{dy}{dx} = x + y$, y(0) = 1, use Euler's modified method to find y(0, 1).

(e) Discuss the method of false position to obtain a real root of an equation.