Seat No. : _______________

TH-121

B.Sc. Sem.-I

May-2013

101 – Mathematics

(Calculus and Matrix Algebra)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ **પાંચ** પ્રશ્નો છે.

(2) **બધા** જ પ્રશ્નોના ગુણ સરખા છે.

(3) માંગ્યા પ્રમાણે જ જવાબ આપો.

1\. (અ) જો $y = (ax + b)^m$ જ્યાં $ax + b \in R$ હોય તો સાબિત કરો કે $y_n = \frac{m!}{(m-n)!} a^n (ax + b)^{m-n}$ જ્યાં $m > n$. જો $m = n$, $m < n$ વિકલ્પ માટે y_n લખો.

અથવા

લાયબ્નીઝનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(બ) શ્રેઢીની અભિસારીતા અને અપસારીતા માટેની ડી. એલ્મ્બર્ટ ગુણોત્તર કસોટી લખો અને સાબિત કરો.

(ક) ગમે તે **એક** ગણો :

(1) જો $y = \sin (m \sin^{-1}x)$ $x \in (-1, 1)$ હોય તો સાબિત કરો કે $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)x\, y_{n+1} = (n^2 - m^2)y_n$.

(2) જો $y = \sec x$ હોય તો સાબિત કરો કે $(y_3 - 3y_1) = (3y_2 - y) \tan x$.

(3) શ્રેઢી : $\frac{0!}{1} + \frac{1!}{2} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{4^3} + \ldots$ અભિસારીતા ચર્ચો.

2\. (અ) રોલનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

અથવા

મેક્લોરીનનું પ્રમેય લખો. આ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી $\log (1 + x)$, $-1 < x \leq 1$ નું x નાં ઘાતમાં વિસ્તરણ મેળવો.

(બ) લ.પિતાનો બીજો નિયમ લખો અને સાબિત કરો.

(ક) ગમે તે **એક** ગણો :

(1) જો $0 < a < b$ હોય તો સાબિત કરો કે કોઈ સંખ્યા c એવી મળે કે જેથી $0 < c < b$ અને $\frac{a^b - 1}{\log a} = a^c(1 + c^2) \tan^{-1}b$.

(2) $x > 0$, માટે સાબિત કરો કે $x > \log (x + 1) > \frac{x}{1 + x}$.

3. (અ) જો A અને B, $m \times n$ પ્રકારના ચોરસ શ્રેણિક હોય તો નીચેના વિધાનો સાબિત કરો :

(a) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(b) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

(c) $(A^T)^T = A$

અથવા

સાબિત કરો કે પ્રત્યેક ચોરસ શ્રેણિક સંમિત અને વિસંમિતના સરવાળા તરીકે અભિવ્યક્ત થાય છે.

(બ) જો A અને B હરમીશીયન શ્રેણિક હોય તો સાબિત કરો કે

(i) $(A + B)^* = A^* + B^*$

(ii) $(AB)^* = B^*A^*$

(ક) ગમે તે **એક** ગણો :

(i) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ હોય તો A^{-1} મેળવો.

(ii) જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ હોય તો શ્રેણિક A નો કોટી મેળવો.

4. (અ) n અજ્ઞાત રાશિ માટે n સુરેખ સમીકરણ સંહતિના ઉકેલ માટે ક્રેમરની રીત વર્ણવો.

અથવા

જો $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ એ શ્રેણિક $A = (adj)_n$ ના લાક્ષણિક મૂલ્ય હોય તો A^3 ના લાક્ષણિક મૂલ્ય $\lambda_1^3, \lambda_2^3, \ldots \lambda_n^3$ છે એમ બતાવો.

(બ) ક્લે-હેમીલ્ટનનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(ક) ગમે તે **એક** ગણો **:**

(i) જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ માટે ક્લે-હેમીલ્ટનનું પ્રમેય ચકાસો અને A^{-1} મેળવો.

(ii) સમીકરણ $x + y + z = 6,\ 2x - y + z = 3, x + 3y - z = 4$ નો ઉકેલ ક્રેમરની રીતથી વર્ણવો.

5. માંગ્યા પ્રમાણે જવાબ આપો :

(1) જો $y = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ હોય તો y_n લખો.

(2) જો $y = \frac{1}{2^{x-1}}$ હોય તો y_n લખો.

(3) એકાન્તર શ્રેઢી અભિસારી ક્યારે કહેવાય ? તેનું એક ઉદાહરણ આપો.

(4) જો અનંત શ્રેઢી $\sum an$ અભિસારી હોય અને $\sum bn$ અપસારી હોય તો $\sum an \pm bn$ અભિસારીતા શું થાય ?

(5) ચુસ્ત વધતું વિધેય વ્યાખ્યા આપી તેનું એક ઉદાહરણ આપો.

(6) અનિશ્ચિત સ્વરૂપની વ્યાખ્યા આપો.

(7) કિંમત મેળવો $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$.

(8) સહ અવયજ શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો.

(9) ઉર્ધ્વત્રિકોણીય શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપી તેનું એક ઉદાહરણ આપો.

(10) શ્રેણિકના વ્યસ્ત મેળવવાની કોઈપણ બે રીત જણાવો.

(11) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix}$ તો AB શું થાય ?

(12) લાગ્રાન્જનાં મધ્યકમાન પ્રમેય લખો.

(13) લાક્ષણિક મૂલ્ય અને લાક્ષણિક સદિશની વ્યાખ્યા આપો.

(14) જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & -i \\ 1 & 2-i & -5+i \end{bmatrix}$ હોય તો A^* મેળવો.

Seat No. : _______________

TH-121

B.Sc. Sem.-I

May-2013

101 – Mathematics

(Calculus and Matrix Algebra)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) Total **five** questions in this paper.

(2) **All** questions carry equal marks.

(3) Do as directed as required.

1. (a) If $y = (ax + b)^m$ where $ax + b \in R$ then prove that $y_n = \frac{m!}{(m-n)!} a^n (ax + b)^{m-n}$ where $m > n$. If $m = n$, $m < n$ then state y_n.

OR

State and prove Leibnitz Theorem.

(b) For convergence and divergence of infinite series state and prove De'Alembert's Ratio Test.

(c) Attempt any **one** :

(1) If $y = \sin(m \sin^{-1}x)$ $x \in (-1, 1)$ then prove that $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)x\, y_{n+1} = (n^2 - m^2)y_n$.

(2) If $y = \sec x$ then prove that $(y_3 - 3y_1) = (3y_2 - y) \tan x$.

(3) Discuss convergence of infinite series : $\frac{0!}{1} + \frac{1!}{2} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{4^3} + \ldots$

2. (a) State and prove Roll's Theorem.

OR

State only Maclaurin's Theorem. Using this expand $\log(1 + x)$, $-1 < x \leq 1$ in the power of x.

(b) State and prove L'Hospital's Second Law.

(c) Attempt any **one :**

(1) If $0 < a < b$ then prove that there exist a number c such that $0 < c < b$ and $\frac{a^b - 1}{\log a} = a^c(1 + c^2) \tan^{-1} b$.

(2) If $x > 0$, then prove that $x > \log(x + 1) > \frac{x}{1 + x}$.

3. (a) If A and B are m × n square matrix then prove following result :

(a) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(b) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

(c) $(A^T)^T = A$

OR

Prove that every square matrix can be expressed as a sum of symmetric and skew-symmetric.

(b) If A and B Hermitian matrics then prove that

(i) $(A + B)^* = A^* + B^*$

(ii) $(AB)^* = B^*A^*$

(c) Attempt any **one :**

(i) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ then find A^{-1}.

(ii) If $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ then find rank of A.

4. (a) Discuss the Crammer's rule for the solution of n^{th} linear equation of n unknown variables.

OR

If $\lambda_1, \lambda_2 \ldots. \lambda_n$ are characteristic values of matrix $A = (adj)_n$ then prove that λ_1^3, $\lambda_2^3, \ldots. \lambda_n^3$ are characteristic values of A^3.

(b) State and prove Caley-Hamilton theorem.

(c) Attempt any **one :**

(i) For $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ verify Caley-Hamilton theorem and find A^{-1}.

(ii) Using Crammer's rule obtain the salutation of the system of linear equation :

$x + y + z = 6,\ 2x - y + z = 3, x + 3y - z = 4$

5. Do as directed as required :

(1) If $y = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ then write down y_n.

(2) If $y = \frac{1}{2^{x-1}}$ then find y_n.

(3) When is Alternative series convergent ? Give one example.

(4) If infinite series Σan convergent and Σbn divergent then what is convergence of $\Sigma an \pm bn$.

(5) Define strictly increasing function. Give one example.

(6) Define Indeterminate form.

(7) Find the value of $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$

(8) Define Adjoint matrix.

(9) Define upper triangular matrix. Give one example.

(10) State any two methods for finding inverse of matrix.

(11) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix}$ then what is AB ?

(12) State the Lagrange's mean value theorem.

(13) Define Eigen value and Eigen vector.

(14) If $A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & -i \\ 1 & 2-i & -5+i \end{bmatrix}$ then find A^*.
