Seat No. : _______________

AM-114

April-2015

B.Sc., Sem.-IV

MAT - 204 : Mathematics

(Advanced Calculus - II)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ **5** પ્રશ્નો છે. **બધા** જ પ્રશ્નો ફરજીયાત છે.
(2) **દરેક** પ્રશ્નનાં ગુણ સમાન છે.

1. (a) $\iint_E (x^2 - y^2)\,dx\,dy$, જ્યાં $E = \{(x, y) / 0 \le x \le 1, y \ge 1, y \le x + 1\}$નું મૂલ્ય શોધો. **7**

અથવા

$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{(e^y + 1)\,(\sqrt{1 - x^2 - y^2})}\,dx\,dy$ માટે સંકલનનો ક્રમ બદલીને તેનું મૂલ્ય શોધો.

(b) સંકલ $\int_{x=0}^{2a} \int_{y=\sqrt{2ax - x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\,dxdy$ માટે માત્ર સંકલનનો ક્રમ બદલો. **7**

અથવા

ધ્રુવીય યામ પદ્ધતિમાં રૂપાંતરીત કરીને $\iint_R \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}\,dxdy$,
જ્યાં $R = \{(x, y) / x \ge 0, y \ge 0, x^2 + y^2 \le 1\}$ ની કિંમત મેળવો.

2. (a) પ્રચલિત સંકેતો મુજબ સાબિત કરો કે $\beta(m, n) = \frac{\Gamma m\,\Gamma n}{\Gamma (m + n)}$. **7**

અથવા

જો $\bar{f}(\bar{r}) = (f_1(\bar{r}), f_2(\bar{r}), f_3(\bar{r}))$ અને $\bar{g}(\bar{r}) = (g_1(\bar{r}), g_2(\bar{r}), g_3(\bar{r}))$ હોય તો સાબિત કરો કે $\text{div}(\bar{f} \times \bar{g}) = \bar{g} \cdot curl(\bar{f}) - \bar{f} \cdot \text{curl}(\bar{g})$, જ્યાં $\bar{f}$, $\bar{g}$ એ $D \subset R^3$ પર વિકલનીય સદિશ વિધેયો છે.

(b) બીટા-ગામા વિધેયોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાની કિંમત મેળવો : **7**

(i) $\int_0^1 x^5 (1 - x^3)^{10}\,dx$ (ii) $\int_0^\infty \frac{x^4}{(1 + x)^{15}}\,dx$

અથવા

જો $\bar{r} = (x, y, z)$ અને $r = |\bar{r}|$ હોય, તો સાબિત કરો કે $div(\phi(r)\,\bar{r}) = 3\,\phi(r) + r\,\phi'(r)$

3. (a) સ્ટોકનો પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

અથવા

સમતલમાં ગ્રીનનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(b) સંકલ $\oint_C (x^2 + y)\, dx + (2x + y^2)\, dy$, જ્યાં C એ (1, 1), (1, 2), (2, 2) અને (2, 1) શિરોબિંદુઓવાળો ચોરસ છે. **7**

અથવા

જો S એ R^3 માં ત્રણે યામ સમતલો અને સમતલો $x = a, y = a, z = a$ વડે સીમિત પૃષ્ઠ હોય, તો $\iint_S (x^3 - yz)\, dy\, dz - 2x^2y\, dz\, dx + z\, dxdy$ નું મૂલ્ય શોધો.

4. (a) સાબિત કરો કે પરિભ્રમણીય પૃષ્ઠ (surface of revolution) $z = f(r)$, જ્યાં $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, નું આંશિક વિકલ સમીકરણ $yp - xq = 0$ છે. **7**

અથવા

સાબિત કરો કે લાગ્રાન્જનાં સમીકરણ, $P(x, y, z)p + Q(x, y, z)q = R(x, y, z)$, જ્યાં P, Q, R એ x, y, z ના સતત વિકલનીય વિધેયો છે, જે એક સાથે શૂન્ય નથી, નો ઉકેલ $F(u, v) = 0$ છે. જ્યાં $u(x, y, z) = c_1$ અને $v(x, y, z) = c_2$ એ સમીકરણ $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ નાં બે સુરેખ સ્વાયત ઉકેલ છે.

(b) $z = xy + F(x^2 + y^2)$ માંથી, વિધેય F નો લોપ કરીને તેનું આંશિક વિકલ સમીકરણ મેળવો. **7**

અથવા

આંશિક વિકલ સમીકરણ $(x^2 + y^2)p + 2xyq = (x + y)z$ નો ઉકેલ મેળવો.

5. માગ્યા પ્રમાણે ઉત્તર લખો : **14**

(1) $\int_0^1 \int_1^{x^2} \int_{2y}^{x+y} x\, dx\, dy\, dz$ નું મૂલ્ય મેળવો.

(2) ત્રિ-સંકલ $\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz$ ને ગોલીય યામ પદ્ધતિમાં રૂપાંતરિત કરવા માટેનું સૂત્ર લખો.

(3) $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ ની કિંમત શોધો.

(4) પ્રચલિત સંકેતો મુજબ સાબિત કરો કે $curl\,(grad\,\phi) = \theta$.

(5) આંશિક વિકલ સમીકરણનાં પ્રકારો લખો.

(6) આંશિક વિકલ સમીકરણ માટે તેનાં ઉકેલોનાં પ્રકારો લખો.

(7) સાદા સંવૃત્ત વક્ર (Simple closed curve) C વડે સીમીત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ, $\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$ છે તેમ સાબિત કરો.

Seat No. : _______________

AM-114

April-2015

B.Sc., Sem.-IV

MAT - 204 : Mathematics

(Advanced Calculus - II)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) There are **5** questions in this paper. **All** questions are compulsory.
(2) **All** questions carry equal marks.

1. (a) Evaluate $\iint\limits_E (x^2 - y^2)\,dx\,dy$, where E = $\{(x, y) / 0 \le x \le 1, y \ge 1, y \le x + 1\}$. **7**

OR

Evaluate after changing the order of integration

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{(e^y + 1)\,(\sqrt{1 - x^2 - y^2})}\,dx\,dy.$$

(b) Change the order of integration only for the integral :

$$\int_{x=0}^{2a}\int_{y=\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\,dxdy.$$ **7**

OR

Evaluate the $\iint\limits_R \sqrt{\dfrac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}\,dxdy$, where R = $\{(x, y) / x \ge 0, y \ge 0, x^2 + y^2 \le 1\}$ by changing into polar coordinates.

2. (a) In usual notations, prove that $\beta(m, n) = \dfrac{\Gamma m\,\Gamma n}{\Gamma(m + n)}$. **7**

OR

If $\bar{f}(\bar{r}) = (f_1(\bar{r}), f_2(\bar{r}), f_3(\bar{r}))$ and $\bar{g}(\bar{r}) = (g_1(\bar{r}), g_2(\bar{r}), g_3(\bar{r}))$ then prove that, div $(\bar{f} \times \bar{g}) = \bar{g} \cdot curl(\bar{f}) - \bar{f} \cdot$ curl $(\bar{g})$, where $\bar{f}$, $\bar{g}$ are two differentiable vector point functions on $D \subset R^3$.

(b) Evaluate the following using beta-gamma functions : **7**

(i) $\displaystyle\int_0^1 x^5\,(1 - x^3)^{10}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^4}{(1 + x)^{15}}\,dx$

OR

If $\bar{r} = (x, y, z)$ and $r = |\bar{r}|$ then prove that $div\,(\phi(r)\,\bar{r}) = 3\,\phi(r) + r\,\phi'(r)$

3. (a) State and prove the Stoke's theorem. **7**

OR

State and prove the Green's theorem in plane.

(b) Compute $\oint_C (x^2 + y)\, dx + (2x + y^2)\, dy$, where C is the square having vertices (1, 1), (1, 2), (2, 2) and (2, 1). **7**

OR

Evaluate $\iint_S (x^3 - yz)\, dy\, dz - 2x^2y\, dz\, dx + z\, dxdy$ where S is the surface bounded by the three coordinate planes and the planes $x = a, y = a, z = a$.

4. (a) Prove that the partial differential equation of the surface of revolution z = f(r), where r = $\sqrt{x^2 + y^2}$, is $yp - xq = 0$. **7**

OR

Prove that the general solution of the Lagrange's equation $P(x, y, z)p + Q(x, y, z)q = R(x, y, z)$, where P, Q, R are continuously differentiable functions of x, y, z not vanishing simultaneously is given by $F(u, v) = 0$. Where $u(x, y, z) = c_1$ and $v(x, y, z) = c_2$ are two independent solutions of the system $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$.

(b) Construct P.D.E. by eliminating arbitrary function from $z = xy + F(x^2 + y^2)$. **7**

OR

Solve the PDE $(x^2 + y^2)p + 2xyq = (x + y)z$.

5. Do as directed : **14**

(1) Evaluate $\int_0^1 \int_1^{x^2} \int_{2y}^{x+y} x\, dx\, dy\, dz$.

(2) Write the formula to transform $\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ into spherical coordinates.

(3) Obtain the value of $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

(4) In usual notation prove that *curl* (*grad* ϕ) = θ.

(5) Explain the different types of partial differential equations.

(6) Explain the different types of solution of partial differential equations.

(7) Prove that the area bounded by a simple closed curve C is $\frac{1}{2}\oint_C x\, dy - y\, dx$.
