

14F-105

May-2015

B.Sc., Sem.-II**Core Course 3 : Mathematics, Paper-103****Time : 3 Hours]****[Max. Marks : 70**

- સૂચના : (1) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.
 (2) બધા જ પ્રશ્નોના ગુણ સમાન છે.
 (3) સંકેતો પ્રચલિત છે.

1. (a) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ નાં ઉકેલની રીત સમજાવો, જ્યાં P અને Q એ xના વિધેયો છે. $\frac{dy}{dx} - xy = x^3y^2$ નો ઉકેલ પણ મેળવો.

અથવા

વિકલ સમીકરણ $y = xf(P) + g(P)$ ના ઉકેલની રીત સમજાવો.
 $y = 2Px + \tan^{-1} P$ નો ઉકેલ પણ મેળવો.

- (b) સમીકરણ ઉકેલો :

- (1) $(3 + e^{2x}) \cos 2y dy + e^{2x} \sin 2y dx = 0$
 (2) $y = 2P + 3P^2$

અથવા

સમીકરણ ઉકેલો :

- (1) $xyP^3 + (2y^2 - 3x^2)P^2 - 6xyP = 0$, જ્યાં $x \neq 0$
 (2) $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + y = \tan^{-1} x$

2. (a) જો
- $f(-a^2) \neq 0$
- હોય તો સાબિત કરો કે

$$\frac{1}{f(D^2)} \cos ax = \frac{1}{f(-a^2)} \cos ax, \text{ જ્યાં } D = \frac{d}{dx}$$

$$\frac{\cos 3x}{D^2 + 2D + 1} \text{ નું સાદુંરૂપ આપો.}$$

અથવા

સાબિત કરો : $\frac{1}{f(D)} e^{ax} F(x) = e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} F(x)$

$$\frac{x e^{4x}}{D^2 - 5D + 6} \text{ નું સાદુંરૂપ આપો.}$$

- (b) ઉકેલ મેળવો :

- (1) $(D^2 - 4D + 3)y = 10 e^{2x} \cos 3x$
 (2) $x^2 D^2 - 2xD + 2y = x^3$

અથવા

- (1) $(2D^4 + 2D^3 + D^2 + 4D + 3)y = 0$
 (2) $(D^2 - 1)y = x^2$

3. (a) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z = 3$, $x + y + 2z = 4$ વર્તુળમાંથી પસાર થતું અને $4x + 3z = 14$ સમતલને સ્પર્શતા ગોલકનું સમીકરણ મેળવો.

અથવા

R^3 નાં બે ભિન્ન ગોલકો પરસ્પર લંબચ્છેદીય હોવાની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત મેળવો.

- (b) (1) સાબિત કરો કે ગોલકો $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 5z = 0$ અને $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y - 6z + 9 = 0$ પરસ્પર છેદે છે.
 (2) R^3 માં $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$, $3x + 4y - 2z = 10$ વર્તુળમાંથી અને $(2, -1, 1)$ બિંદુમાંથી પસાર થતાં ગોલકનું સમીકરણ મેળવો.

અથવા

- (1) સમતલ $Kx + y - 2z = 9$ એ ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ને સ્પર્શે તો K ની કિંમત શોધો.
 (2) ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10y = 23$ અને સુરેખા $\{(4K + 1, 3K - 1, -5K + 3) \mid K \in R\}$ નો છેદ મેળવો.

4. (a) શાંકવનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો અને શાંકવ $15 - 3r = r \cos \theta$ નો પ્રકાર જણાવો.

અથવા

સાબિત કરો કે $xy + yz + zx = 0$ સમીકરણનો પથ સમશંકુ દર્શાવે છે. તેનો અક્ષ તેમજ અર્ધ શિરઃકોણ શોધો.

- (b) (1) વક્ર $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, $zx^2 + y^2 = 2z$ માંથી પસાર થતાં અને ઉગમબિંદુ શીર્ષવાળા શંકુનું સમીકરણ મેળવો.
 (2) ધ્રુવીય યામ પદ્ધતિમાં $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ અને $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ બિંદુઓમાંથી પસાર થતી સુરેખાનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો. તેનાં પર ધ્રુવમાંથી દોરેલા લંબની લંબાઈ શોધો.

અથવા

- (1) $(1, -2, 3)$ બિંદુમાંથી પસાર થતાં અને $\{(2, -3, 5 + K) \mid K \in R\}$ અક્ષવાળા સમનળાકારનું સમીકરણ મેળવો.
 (2) જો બિંદુ A નાં ગોલીય યામ $\left(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ હોય તો તેનાં સિલિન્ડરીય અને કાર્તેઝીય યામ શોધો.

5. ટૂંકમાં જવાબ આપો :

- (1) દ્વિપૃષ્ઠીય અતિવલયજ એ સમતલને સ્પર્શે તે માટેની શરત લખો.
 (2) વિકલ સમીકરણ $(y - xP)^2 = 4P$ ઉકેલો.
 (3) ઉગમબિંદુ શિરોબિંદુ, z -અક્ષવાળા અને θ અર્ધ શિરઃકોણવાળા સમશંકુનું સમીકરણ લખો.
 (4) ઉકેલો : $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$
 (5) કેન્દ્ર $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ અને 7 ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.
 (6) સંકલ્પકારક અવયવ સમજાવો.
 (7) જેનો સામાન્ય ઉકેલ $Y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ હોય તેવું વિકલ સમીકરણ મેળવો.

14F-105

May-2015

B.Sc., Sem.-II**Core Course 3 : Mathematics, Paper-103****Time : 3 Hours]****[Max. Marks : 70**

- Instructions :** (1) All questions are compulsory.
 (2) All questions carry equal marks.
 (3) Symbols are usual.

1. (a) Explain the method to solve a differential equation $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$, where P and Q are functions of x. Also solve $\frac{dy}{dx} - xy = x^3y^2$.

OR

Explain the method to solve a differential equation :

$$y = xf(P) + g(P)$$

$$\text{Also solve } y = 2Px + \tan^{-1} P$$

- (b) Solve the equations :

(1) $(3 + e^{2x}) \cos 2y \, dy + e^{2x} \sin 2y \, dx = 0$

(2) $y = 2P + 3P^2$

OR

Solve the equations :

(1) $xyP^3 + (2y^2 - 3x^2)P^2 - 6xyP = 0$, where $x \neq 0$

(2) $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + y = \tan^{-1} x$

2. (a) If
- $f(-a^2) \neq 0$
- , then prove that

$$\frac{1}{f(D^2)} \cos ax = \frac{1}{f(-a^2)} \cos ax, \text{ where } D = \frac{d}{dx}$$

Also simplify $\frac{\cos 3x}{D^2 + 2D + 1}$

OR

Prove : $\frac{1}{f(D)} e^{ax} F(x) = e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} F(x)$

Also simplify $\frac{x e^{4x}}{D^2 - 5D + 6}$

- (b) Obtain the solution :

(1) $(D^2 - 4D + 3)y = 10 e^{2x} \cos 3x$

(2) $x^2 D^2 - 2xD + 2y = x^3$

OR

(1) $(2D^4 + 2D^3 + D^2 + 4D + 3)y = 0$

- (2) $(D^2 - 1)y = x^2$
3. (a) Find the equation of the sphere passing through the circle $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z = 3$, $x + y + 2z = 4$ and touches the plane $4x + 3z = 14$.

OR

Obtain the necessary and sufficient condition for two different spheres in \mathbb{R}^3 are orthogonal.

- (b) (1) Prove that spheres $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 59 = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y - 6z + 9 = 0$ are intersect.
- (2) Find the equation of the sphere, passing through circle $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$, $3x + 4y - 2z = 10$ and point $(2, -1, 1)$ in \mathbb{R}^3 .

OR

(1) If the plane $Kx + y - 2z = 9$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, find the value of K .

- (2) Find the intersection of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10y = 23$ and the straight line $\{(4K + 1, 3K - 1, -5K + 3) \mid K \in \mathbb{R}\}$

4. (a) Obtain the Polar equation of a conic, which curve is represented by the Polar equation $15 - 3r = r \cos \theta$

OR

Prove that the equation $xy + yz + zx = 0$ represents a right cone. Obtain its axis and semi vertical angle.

- (b) (1) Find the equation of cone, having a vertex at origin and passing through the curve $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, $2x^2 + y^2 = 2z$.
- (2) Find the polar equation of the line passing through $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ and $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$. Find the length of perpendicular drawn from the pole upon it.

OR

(1) Find the equation of right cylinder whose axis is $\{(2, -3, 5 + K) \mid K \in \mathbb{R}\}$ and passes through point $(1, -2, 3)$.

- (2) If the spherical co-ordinates of point A are $\left(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, find its Cartesian and cylindrical co-ordinates.

5. Give the answer in short :

- (1) Write a condition for which hyperboloid of two sheets touches the plane.
- (2) Solve the differential equation $(y - xP)^2 = 4P$.
- (3) What is the equation of right circular cone; whose vertex is origin, axis is z-axis and semi vertical angle is θ ?
- (4) Solve : $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$
- (5) Obtain the equation of circle having centre $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ and radius 7.
- (6) Explain Integral Factor
- (7) Find a differential equation whose general solution is $Y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$