Seat No. : ______________

AB-117

April-2023

B.Sc., Sem.-VI

CC-307 : Physics

(Mathematical Physics, Classical Mechanics & Quantum Mechanics)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચનાઓ : (1) **તમામ પ્રશ્નોના ગુણ સરખા છે.**

(2) સંજ્ઞાઓનાં અર્થ હંમેશ મુજબનાં છે.

1. (a) સાબિત કરો કે $J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$ **7**

અથવા

(a) જો v પૂર્ણાંક ન હોય તો દર્શાવો કે Wronskian,

$$W[J_v(x), J_{-v}(x)] = -\frac{2 \sin \pi v}{\pi x}$$ **7**

(b) સાબિત કરો કે, $\cos x = J_o(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x)$ **7**

અથવા

(b) સાબિત કરો કે, $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x$ **7**

2. (a) લાગ્રાન્જેનાં સમીકરણનો ઉપયોગ કરી ન્યૂટનની ગતિનું સમીકરણ તારવો. **7**

અથવા

(a) દર્શાવો કે સમતલમાં બે બિંદુઓ વચ્ચેનું ન્યૂનતમ અંતર સુરેખા છે. **7**

(b) સમાંતર અને શ્રેણી L-C-R પરિપથ માટે લાગ્રાન્જીયન મેળવો. 7

અથવા

(b) કોન્ફીગ્યુરેશન અવકાશ, વેગમાન અવકાશ અને ફેઝ-સ્પેસ વર્ણવો. દર્શાવો કે એક પરિમાણીય દોલક (one dimensional harmonic oscillator) માટે ફેઝ-પથનો ઢાળ, $\frac{-m\omega^2 x}{P}$ છે. 7

3. (a) ત્રિ-પરિમાણ કૂપનાં અંદરના ભાગમાં ત્રિજ્યાવર્તી શ્રોડિંજર સમીકરણનો ઉકેલ મેળવો. 7

અથવા

(a) ત્રિ-પરિમાણીક સમ-દિક્ધર્મી દોલક માટે સાબિત કરો કે

$$E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega$$ 7

(b) ત્રિ-પરિમાણીક કૂપનાં બહારનાં ભાગમાં, non-localized states (E > 0) ની ચર્ચા કરો. 7

અથવા

(b) H-atom માટે નીચેનાં સમીકરણનાં ઉપયોગથી, તેની ઉર્જા આયગન કિંમતનું મૂલ્ય મેળવો.

$$\frac{1}{\rho^2}.\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2.\frac{dR}{d\rho}\right) + \left(-\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right) R(\rho) = 0$$

અહીંયા, $R(\rho) = \frac{u(\rho)}{\rho}$, એસીમ્પટોટીક પ્રદેશમાં, $R(\rho) = e^{-\rho/2}$ અને $\lambda = \frac{-z\,e^2}{\hbar}\left[\frac{\mu}{2E}\right]^{1/2}$ છે. 7

4. (a) જો A એ સેલ્ફ-એડજોઈન્ટ કારક હોય તો સાબિત કરો કે તેની આયગન કિંમત વાસ્તવિક છે અને તે પણ સાબિત કરો કે, $\langle a' | a \rangle = 0$ જ્યારે $a \neq a'$ **7**

અહિં, $| a \rangle$ અને $| a' \rangle$ એ A ની આયગન સ્ટેટસ છે જ્યાં તેની આયગન કિંમતો અનુક્રમે a અને a' છે.

અથવા

(a) સાબિત કરો કે, $\psi'(x) = e^{\frac{i\xi Px}{\hbar}}\,\psi(x)$ **7**

(b) સાબિત કરો કે, $\langle x | \hat{P} | x \rangle = -i\hbar \frac{d\psi}{dx}(x)$ **7**

અથવા

(b) સાબિત કરો કે, $|x'\rangle = e^{\frac{-i\theta n.\hat{L}}{\hbar}}.|x\rangle$ **7**

5. સૂચના મુજબ કરો. (કોઈપણ **સાત** – પ્રત્યેક પ્રશ્નનાં બે માર્ક્સ છે.) **14**

(1) હર્માઈટનું વિકલ સમીકરણ અને લેંગુરીનું વિકલ સમીકરણ લખો.

(2) બેસલનાં વિધેય માટે generating function $g(x, t)$ લખો અને ગામા વિધેય $\Gamma(z)$ વ્યાખ્યાયિત કરો.

(3) ગોળીય ન્યુમાન વિધેય વ્યાખ્યાયિત કરો અને ગોળીય બેસલ વિધેય વ્યાખ્યાયિત કરો.

(4) Δ(d) variation અને δ-variation વચ્ચેનો તફાવત લખો.

(5) Geodesic (ભૂમાપન) વ્યાખ્યાયિત કરો.

(6) સરળ દોલક માટે લાગ્રાન્જીયન લખો.

(7) “L” ની વ્યાખ્યા T અને Vની મદદથી કરો.

(8) સમ-દિકધર્મી દોલક વ્યાખ્યાયિત કરો.

(9) ત્રિ-પરિમાણિક કૂપ માટે zero point energy લખો.

(10) $(A^{+})^{+}$ શું થાય ?

(11) $\left[\hat{x}, \hat{p}\right]$ અને $\left[\hat{p}, \hat{x}\right]$ ની કિંમતો લખો.

(12) એકમ કારક $\hat{1}$ અને પ્રક્ષેપ કારક (Projection Operator) $\hat{Pa}$ વ્યાખ્યાયિત કરો.

Seat No. : _______________

AB-117

April-2023

B.Sc., Sem.-VI

CC-307 : Physics

(Mathematical Physics, Classical Mechanics & Quantum Mechanics)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) **All** questions carry equal marks.
(2) Symbols have their usual meaning.

1. (a) Prove that $J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$ **7**

OR

(a) Show that the Wronskian,

$$W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = -\frac{2 \sin \pi\nu}{\pi x}$$ **7**

If v is not integer.

(b) Prove that, $\cos x = J_o(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x)$ **7**

OR

(b) Prove that, $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \, . \sin x$ **7**

2. (a) Derive Newton's equation of motion using Lagrangian equation. **7**

OR

(a) Show that the shortest distance between two points in a plane is a straight line. **7**

(b) Obtain Lagrangian for series and parallel L-C-R circuits. **7**

OR

(b) Explain configuration space, momentum space and phase space. Show that the slope of the phase path for one dimensional harmonic oscillator is $\frac{-m\omega^2 x}{P}$ **7**

3. (a) Using radial Schrodinger equation, obtain the solution in the interior region of square well potential. **7**

OR

(a) For three dimensional isotropic harmonic oscillator, prove that

$$E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega$$ **7**

(b) Discuss non-localized states (E > 0) in outer region of the three dimensional square well potential. **7**

OR

(b) Using the following equation for H-atom,

$$\frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \cdot \frac{dR}{d\rho}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right) R(\rho) = 0$$

Here, $R(\rho) = \frac{u(\rho)}{\rho}$, in asymptotic region

$R(\rho) = e^{-\rho/2}$ and $\lambda = \frac{-z\,e^2}{\hbar}\left[\frac{\mu}{2E}\right]^{1/2}$ obtain the energy eigen value of H-atom. **7**

4. (a) If A is a self-adjoint operator, prove that its eigen value is real. Also prove that,

$\langle a' | a \rangle = 0$ when $a \neq a'$ **7**

Here, $| a \rangle$ and $| a' \rangle$ are eigen states of A with respective eigen values "a" and "a' ".

OR

(a) Prove that $\psi' (x) = e^{\frac{i\xi Px}{\hbar}} \psi (x)$ **7**

(b) Prove that $\langle x | \hat{P} | x \rangle = -i \hbar \frac{d\psi}{dx} (x)$ **7**

OR

(b) Prove that $| x' \rangle = e^{-i\theta n . \frac{\hat{L}}{\hbar}} . | x \rangle$ **7**

5. Do as directed : (any **seven** – Each question carries **two** marks) **14**

(1) Write down Hermite differential equation and Laguerre differential equation.

(2) Write the generating function g (x, t) for Bessel function and define gamma function $\Gamma(z)$.

(3) Define spherical Neumann function and spherical Bessel function.

(4) Write the difference between Δ(d) variation and δ-variation.

(5) Define geodesic.

(6) Write Lagrangian for simple pendulum.

(7) Define "L" in terms of T and V.

(8) Define isotropic harmonic oscillator.

(9) Write down zero point energy of 3-dimensional square well potential.

(10) What is $(A^{+})^{+}$?

(11) Write the values of $\left[\hat{x}, \hat{p}\right]$ and $\left[\hat{p}, \hat{x}\right]$

(12) Define unit operator $\hat{1}$ and projection operator $\hat{Pa}$.