Seat No. : _______________

MD-118

March-2019

B.Sc., Sem.-I

CC-3-101 : Mathematics
(Calculus and Matrix Algebra)

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) બધા જ પ્રશ્નો ફરજીયાત છે.

(2) સંકેતો પ્રચલિત છે.

1. (A) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) લાયબ્નીઝ પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

(ii) શ્રેઢીની અભિસારીતા વ્યાખ્યાયિત કરો. નીચેની શ્રેઢીની અભિસારીતા ચર્ચો. **7**

$$\sum \frac{n-5}{2n+3} \text{ અને } \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

અથવા

(A) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) અનંત ધન શ્રેઢીની અભિસારિતા ચકાસવા માટેની ગુણોત્તર કસોટી લખો અને સાબિત કરો. **7**

(ii) જો $y = e^{ax} \cos (bx + c)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, c અચળ વાસ્તવિક સંખ્યા છે તો સાબિત કરો કે $y_n = r^n e^{ax} \cos (bx + c + n\theta)$, જ્યાં $a = r \cos \theta$ અને $b = r \sin \theta$. **7**

(B) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો. (ગમે તે **ચાર**) **4**

(i) જો $y = \sin 3x$ હોય તો $y_n =$ _____

(ii) $\left(\frac{1}{2x-3}\right)_n =$ _____

(iii) જો $y = xe^{2x}$ તો $y_n(0)$. શોધો.

(iv) શ્રેણીની અભિસારીતા ચર્ચો. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

(v) શ્રેઢીનો સરવાળો શોધો : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

(vi) એકાંતર શ્રેણીની વ્યાખ્યા આપો.

2. (A) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) કોશીનું મધ્યકમાન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

(ii) જવાબ આપો : **7**

(a) શોધો : $\lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}$.

(b) $\cos x$ નું x ના ઘાતમાં વિસ્તરણ કરો.

અથવા

(A) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) લા' પીટલનો પ્રથમ પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. **7**

(ii) જવાબ આપો : **7**

(a) સાબિત કરો : $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$, જ્યાં $x > 0$.

(b) $\cos x$ નું $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ના ઘાતમાં વિસ્તરણ કરો.

(B) નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો. (ગમે તે **ચાર**) **4**

(i) રોલનું મધ્યકમાન પ્રમેય લખો.

(ii) વિધેય $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ક્યારે વધતું વિધેય છે ?

(iii) e^x નું વિસ્તરણ લખો.

(iv) ટેઈલરનું પ્રમેય લખો.

(v) શોધો : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$.

(vi) શોધો : $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sec x}{x^2}$.

3. (A) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) વ્યાખ્યા આપો : સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણીકો. જો $A = (a_{ij})_{m \times n}$ અને $B = (b_{ij})_{n \times p}$ હોય તો સાબિત કરો કે $(AB)^T = B^T A^T$. **7**

(ii) જો શ્રેણીક $A = \begin{bmatrix} 1+2i & 2 & 3i \\ -1+i & -2-3i & -6 \end{bmatrix}$ તો A^*A હરમિશીયન શ્રેણીક છે તે બતાવો. **7**

અથવા

(A) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) n કક્ષાના ચોરસ શ્રેણિક માટે $A \cdot (\text{adj } A) = (\text{adj } A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$, સાબિત કરો અને શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ માટે ચકાસો. **7**

(ii) વ્યાખ્યા આપો : હાર કોટી અને હાર-સંક્ષિપ્ત સોપાન સ્વરૂપ શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ને હાર-સંક્ષિપ્ત સોપાન સ્વરૂપમાં ફેરવો અને તેનો કોટિ શોધો. **7**

(B) નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો. (ગમે તે ત્રણ) **3**

(i) વિ-હરમિશીયન શ્રેણીકની વ્યાખ્યા આપો.

(ii) સત્ય / અસત્ય નક્કી કરો : $A + A^T$ એ હંમેશા સંમિત શ્રેણિક છે.

(iii) શ્રેણિકના વ્યસ્તની વ્યાખ્યા આપો.

(iv) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ તો A^T શોધો.

(v) જો $A^T = A^{-1}$, હોય તો $\det(A) =$ ______

4. (A) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) વ્યાખ્યા આપો : લાક્ષણીક મૂલ્ય અને લાક્ષણીક સદિશો. **7**

જો λ એ વ્યસ્ત સંપન્ન શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_n$ નું લાક્ષણીક મૂલ્ય હોય, તો દર્શાવો કે

(a) λ^4 એ A^4 નું લાક્ષણીક મૂલ્ય છે.

(b) $\frac{1}{\lambda}$ એ A^{-1} નું લાક્ષણીક મૂલ્ય છે.

(ii) કેલે-હેમીલ્ટન પ્રમેય લખો અને તેનું શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ માટે ચકાસણી કરો. **7**

અથવા

(A) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) શ્રેણિકના $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણીક મૂલ્યો અને લાક્ષણીક સદિશો શોધો. **7**

(ii) ક્રેમરના નિયમનો ઉપયોગ કરીને સમીકરણ સંહતિ ઉકેલો :

$x + y + z = 2,\ 2x + 4y + z = 0,\ 3x + 2y + 9z = 17$ **7**

(B) નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો. (ગમે તે ત્રણ) **3**

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ નું લાક્ષણીક સમીકરણ મેળવો.

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ નું લાક્ષણીક મૂલ્ય મેળવો.

(iii) જો $\lambda = 2$ એ કક્ષા 2 વાળા શ્રેણિક Aના એકમાત્ર લાક્ષણીક મૂલ્ય છે, તો det(A) = ____.

(iv) વિસંગત સંહતિની વ્યાખ્યા આપો.

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણીક મૂલ્ય મેળવો.

Seat No. : _______________

MD-118

March-2019

B.Sc., Sem.-I

CC-3-101 : Mathematics
(Calculus and Matrix Algebra)s

Time : 2:30 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) **All** the questions are compulsory.
(2) Symbols and notations are usual.

1. (A) Write the following :
   (i) State and prove Leibnitz's theorem. **7**
   (ii) Define convergence of a series. Discuss the convergence of the series. **7**

$$\sum \frac{n-5}{2n+3} \text{ and } \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

OR

(A) Write the following :
   (i) State and prove Ratio test for convergence of the infinite positive series. **7**
   (ii) If $y = e^{ax} \cos(bx + c)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, c are constant real numbers, then prove that $y_n = r^n e^{ax} \cos(bx + c + n\theta)$, where $a = r\cos\theta$ and $b = r\sin\theta$. **7**

(B) Answer following in short : (attempt any **four**) **4**
   (i) If $y = \sin 3x$ then $y_n =$ _____
   (ii) $\left(\frac{1}{2x-3}\right)_n =$ _____
   (iii) If $y = xe^{2x}$ then find $y_n(0)$.
   (iv) Discuss convergence of sequence $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.
   (v) Find the sum of series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$
   (vi) Define Alternative series.

2. (A) Write the following :

(i) State and prove Cauchy's mean value theorem. **7**

(ii) Answer the following : **7**

(a) Evaluate : $\lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}$.

(b) Expand $\cos x$ in terms of x.

OR

(A) Write the following :

(i) State and prove L' Hospital's first rule. **7**

(ii) Answer the following : **7**

(a) Show that $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$, where $x > 0$.

(b) Expand $\cos x$ in terms of $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

(B) Answer following in Short : (Attempt any **four**) **4**

(i) State Roll's mean value theorem.

(ii) When is function $f(x) = x^2 - 2x + 1$ increasing ?

(iii) Write expansion of e^x.

(iv) State Taylor's theorem.

(v) Evaluate : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$.

(vi) Evaluate : $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sec x}{x^2}$.

3. (A) Write the following :

(i) Define Symmetric and Skew-symmetric matrices. If $A = (a_{ij})_{m \times n}$ and $B = (b_{ij})_{n \times p}$ then prove that $(AB)^T = B^T A^T$. **7**

(ii) Verify A*A is a Hermitian matrix for a matrix $A = \begin{bmatrix} 1+2i & 2 & 3i \\ -1+i & -2-3i & -6 \end{bmatrix}$. **7**

OR

(A) Write the following :

(i) For a square matrix A of order n, prove that

$A \cdot (\text{adj } A) = (\text{adj } A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$, and verify it for $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. **7**

(ii) Define row rank, row reduced echelon form of a matrix, Transform the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ into the row reduced echelon form. Also find its rank. **7**

(B) Answer following in short : (Attempt any **three**) **3**

(i) Define Skew – Hermitian Matrix.

(ii) True or False : $A + A^T$ is always Symmetric matrix.

(iii) Define inverse of a matrix.

(iv) Find A^T, where $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(v) If $A^T = A^{-1}$, then $\det(A) =$ _______

4. (A) Write the following :

(i) Define Eigen value and Eigen vector. **7**

If λ is an Eigen value of an invertible matrix $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_n$, then show that

(a) λ^4 is the Eigen value of A^4.

(b) $\frac{1}{\lambda}$ is the Eigen value of A^{-1}.

(ii) State Cayley-Hamilton theorem. Verify it for matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **7**

OR

(A) Write the following :

(i) Find Eigen values and Eigen vectors of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. **7**

(ii) Solve : $x + y + z = 2$, $2x + 4y + z = 0$, $3x + 2y + 9z = 17$ using Cramer's rule. **7**

(B) Answer following in short : (Attempt any **three**) **3**

(i) Find Characteristic equation of matrix $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(ii) Find Eigen values of matrix $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(iii) If $\lambda = 2$ is the only Eigen value of matrix A of order 2, then det(A) = ____.

(iv) Define Inconsistent system.

(v) Find Eigen values of matrix $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.