Seat No. : _______________

TQ-115

B. Sc. Sem.-III

May-2013

MATHEMATICS : CC-202

(Linear Algebra-I)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (1) **બધા** જ પ્રશ્નો ફરજીયાત છે અને દરેકનાં ગુણ **14** છે.

(2) **બધા** જ સંકેતો પ્રચલિત છે.

1. (અ) વાસ્તવિક સદિશ અવકાશની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે પ્રત્યેક $u \in V$ અને અદિશ $\alpha \in R$ માટે $0.u = \bar{0}$ તથા $\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

અથવા

ઉપાવકાશની વ્યાખ્યા આપો. બે ઉપાવકાશોનો છેદગણ ઉપાવકાશ થાય છે તેમ સાબિત કરો.

(બ) બતાવો કે $S = \{(x, y, z)/z= 3x - 2y\}$ એ V_3નો ઉપાવકાશ છે. તથા તેનું પરિમાણ (એટલે કે dim S) શોધો.

અથવા

ધારોકે S એ સદિશ અવકાશ Vનો અરિક્ત ઉપગણ હોય તો સાબિત કરો કે [S] એ ગણ S ને સમાવતો નાનાનાં નાનો ઉપાવકાશ છે.

2. (અ) સુરેખ સ્વાયત્ત ગણની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે સુરેખ સ્વાયત્ત ગણનો પ્રત્યેક ઉપગણ પણ સુરેખ સ્વાયત્ત છે.

અથવા

જો U અને W એ સાંત પરિમાણીય સદિશ અવકાશ V ના ઉપાવકાશો હોય તો પ્રચલિત સંકેતો મુજબ સાબિત કરો કે $\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W)$.

(બ) સાબિત કરો કે સાંત પરિમાણીય સદિશ અવકાશ Vના કોઈપણ બે આધારોમાં રહેલા ઘટકોની સંખ્યા સમાન છે.

અથવા

બતાવો કે $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ એ સદિશ અવકાશ V_3નો આધાર છે.

3. (અ) સુરેખ પરિવર્તનની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે $T : V_3 \to V_3$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય $T(x, y\ z) = (x - y, y - z, z - x), \forall (x, y, z) \in V_3$ સુરેખ પરિવર્તન છે.

અથવા

કોટ્યાંક-શૂન્યાંક પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(બ) નીચે આપેલા વિધેયો સુરેખ પરિવર્તન છે કે નહિ તે નક્કી કરો :

(i) $T : V_3 \to V_2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $T(x, y, z) = (x + y, y + z), \forall (x, y, z) \in V_3$.

(ii) $S : V_2 \to V_3$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $S(x, y) = (x, x + 1, x - y), \forall (x, y) \in V_2$.

અથવા

(બ) નીચેના સુરેખ પરિવર્તન માટે કોટ્યાંક-શુન્યાંક પ્રમેય ચકાસો.
$T : V_3 \to V_3$, $T(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત, $\forall (x, y, z) \in V_3$.

4. (અ) (i) સાબિત કરો કે બે સુરેખ પરિવર્તનનો સરવાળો પણ સુરેખ પરિવર્તન છે.

(ii) સાબિત કરો કે સુરેખ પરિવર્તનનો અદિશ સાથેનો ગુણાકાર પણ સુરેખ પરિવર્તન છે.

અથવા

(અ) સુરેખ પરિવર્તનના શુન્યાવકાશની વ્યાખ્યા આપો. સુરેખ પરિવર્તન $T: U \to V$ માટે સાબિત કરો કે T એક-એક હોય તો અને તો જ $N(T) = \{\theta u\}$.

(બ) નીચે આપેલા શ્રેણિક A માટે પ્રમાણિત આધારો સાથે સંકળાયેલ સુરેખ પરિવર્તન મેળવો.
જ્યાં $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

અથવા

(બ) R^3 ના ક્રમિક આધારો $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ અને $B_2 = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (-1, 0, 1)\}$ ને સાપેક્ષ સંકળાયેલ સુરેખ પરિવર્તન $T : R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (x - y + z, 2x + 3y - \frac{z}{2}, x + y - 2z)$ ની સાથે સંકળાયેલ પ્રચલિત શ્રેણિક $A = [T : B_1, B_2]$ મેળવો.

5. ગમે તે **સાત** ના જવાબ આપો :

(i) દ્વિકક્રિયાની વ્યાખ્યા આપો.

(ii) આધારની વ્યાખ્યા આપો.

(iii) ઉપાવકાશના પ્રત્યક્ષ સરવાળાની વ્યાખ્યા આપો.

(iv) એકરૂપતાની વ્યાખ્યા આપો.

(v) R^3 ના કોઈપણ ત્રણ સદિશો સુરેખ સ્વાયત્ત હોવા માટેની શરત લખો.

(vi) સદિશ (1, 1, 2)ને સમાવતા R^3 ના આધારનું ઉદાહરણ આપો.

(vii) સદિશ અવકાશ L(U, V) એટલે શું ? તેને ટૂંકમાં વર્ણવો.

(viii) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ નો કોટિ શું થાય ?

(ix) R^2 ના સદિશો (1, 5) અને (–2, 3) નો સ્પાન શોધો.

Seat No. : _______________

TQ-115

B. Sc. Sem.-III

May-2013

MATHEMATICS : CC-202

(Linear Algebra-I)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) **All** the questions are compulsory and carry **14** marks each.

(2) Notations are usual, everywhere.

1. (a) Define a real vector space and prove that

$0.u = \bar{0}$ for every $u \in V$ and $\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$ for every scalar $\alpha \in R$.

OR

Define subspace. Prove that intersection of two subspaces is also a subspace.

(b) Show that $S = \{(x, y, z)/z = 3x - 2y\}$ is a subspace of the vector space V_3. Also find dim S, the dimension of S.

OR

Let S be a non-empty subset of a vector space V then prove that [S] is a smallest subspace of a vector space which containg the set S.

2. (a) Define Linearly Independent set. Prove that any subset of a linearly independent set is also a linearly independent set.

OR

If U and W are subspaces of a finite dimensional vector space V then prove in usual notations that $\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W)$.

(b) Prove that any two bases of a finite dimensional vector space V has equal number of elements.

OR

Show that $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ is a basis for the vector space V_3.

3. (a) Define a linear transformation. Prove that $T : V_3 \to V_3$ defined as

$T(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x), \forall (x, y, z) \in V_3$ is a linear transformation.

OR

State and prove Rank-Nullity theorem.

(b) Determine whether the following maps are linear or not :

(i) $T : V_3 \to V_2$ defined as $T(x, y, z) = (x + y, y + z), \forall (x, y, z) \in V_3$.

(ii) $S : V_2 \to V_3$ defined as $S(x, y) = (x, x + 1, x - y), \forall (x, y) \in V_2$.

OR

(b) Verify Rank-Nullity theorem.

$T : V_3 \to V_3$ defined as $T(x, y\ z) = (x - y, y - z, z - x), \forall (x, y, z) \in V_3$.

4. (a) (i) Prove that sum of two linear maps is a linear map.

(ii) Prove that scalar product of a linear map is a linear transformation.

OR

(a) Define Null space of a linear transformation. Suppose $T: U \to V$ be a linear transformation then prove that T is one-one if and only if $N(T) = \{\theta\ u\}$.

(b) Find the linear map associated with the following matrix A relative to the standard bases, where $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

OR

(b) Let $T : R^3 \to R^3$ be defined by $T(x, y, z) = (x - y + z, 2x + 3y - \frac{z}{2}, x + y - 2z)$ and if $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ and $B_2 = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (-1, 0, 1)\}$ are two ordered basis of R^3 then in usual notation Find matrix $A = [T : B_1, B_2]$.

5. Attempt any **seven** :

(i) Define : A binary operation.

(ii) Define : Basis.

(iii) Define : the direct sum of subspaces.

(iv) Define : Isomorphism.

(v) Write condition for any three vectors in R^3 becomes a linearly independent.

(vi) Give an example of a basis in R^3 which containing vector (1, 1, 2).

(vii) What is the vector space L(U, V) ? Explain in short.

(viii) What is the rank of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$?

(ix) Find the span of the vector (1, 5) and (–2, 3) in R^2.